MATEMÁTICA

Convenções: Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	: denota o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	: denota o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	: denota o conjunto dos números complexos.
i	: denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$.
$M_{k,n}(\mathbb{R})$	: denota o conjunto das matrizes $k \times n$ de entradas reais.
$M_n(\mathbb{R})$	: denota o conjunto das matrizes $n \times n$ de entradas reais.
$\overline{AB}$	: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
AB	: denota a reta que passa pelos pontos A e B.
$m(\overline{AB})$	: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.
A^T	: denota a transposta da matriz A.

Questão 1. Sejam (a_n) uma progressão aritmética e (b_n) uma progressão geométrica. Se a razão de (a_n) é r, $r \neq 0$, a razão de (b_n) é $q = 1/r$, $a_1 = b_1 = 4$ e

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{50}{3},$$

determine n de modo que a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica seja igual a -80.

Questão 2. Quatro cidades A, B, C e D estão ligadas por seis pontes distintas da seguinte maneira:

– uma ponte liga A e B;
– uma ponte liga A e C;
– uma ponte liga B e C;
– duas pontes ligam B e D;
– uma ponte liga C e D.

Quantos caminhos são possíveis ligando todas as cidades e passando por todas as pontes uma única vez, sabendo que é permitido passar em uma mesma cidade mais de uma vez?

Questão 3. Determine todos os valores reais de x para os quais

$$\left| \log_{1/2} |x| \right| + \left| \log_2 |x| \right| < 4.$$

Questão 4. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, dizemos que A é definida positiva se

$$X^T A X = [y], \qquad y > 0,$$

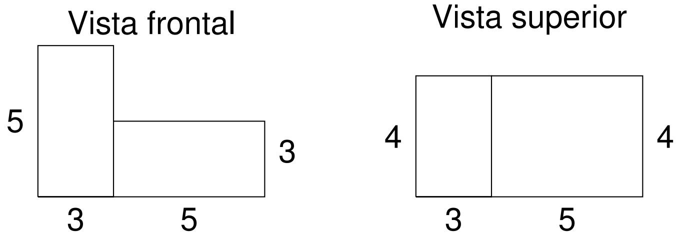
para toda $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ que tem ao menos uma entrada não-nula. Encontre todos os possíveis valores de $b \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

seja definida positiva.

Questão 5. Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 14$, sabendo que vale a relação $p(1 + x) = p(1 - x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Questão 6. O sólido S é formado pela união de dois paralelepípedos retângulos congruentes, com posição e medidas conforme a figura.



Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta completamente contido em S que contém um dos vértices de S. Encontre o maior valor possível de $m(\overline{AB})$.

Questão 7. Determine a equação da circunferência de maior raio que é tangente ao eixo y e passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(3, 6)$.

Questão 8. Considere a parábola de equação $y = 4x - x^2$ com vértice no ponto V. Seja T o trapézio $PABV$, onde $P = (0, 0)$, A é um ponto com abscissa no intervalo $[2, 4]$ e ordenada nula e B é um ponto na parábola com ordenada positiva. Sabendo que $m(\overline{AB}) = \frac{7}{8}\sqrt{5}$, determine a área de T.

Questão 9. Seja $z = 1 + ai$ uma raiz do polinômio $p(x) = x^4 + 10x^2 + mx + 29$, onde a e m são números reais. Determine a área do quadrilátero cujos vértices são as quatro raízes complexas de $p(x)$ no plano de Argand-Gauss.

Questão 10. Sabendo que $\tan(\alpha+\beta) = -2$ e $\operatorname{sen}(\alpha) = (4-\sqrt{5})\operatorname{sen}(\beta)$ para $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, calcule

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$