Estratégia Militares

Correção

Prova EN 2024

Prof. Victor So

1. (EN/2024)

A camisa de um grande clube de futebol carioca e mundial é formada por sete listras verticais (frente da camisa) das cores preta e branca, conforme a figura 1.

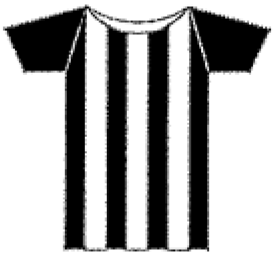


Figura 1

A empresa que confecciona a camisa oferece modelos com diferentes maneiras de disposição das cores das listras, e o clube exige que sempre exista a cor preta entre brancas e/ou a core branca entre pretas, conforme apresentado na figura 1 (camisa original) e nas figuras 2, 3 e 4 abaixo.

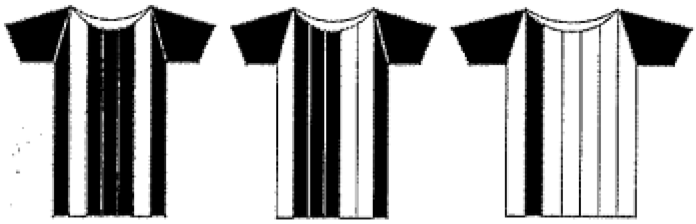


Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considerando apenas a frente da camisa e cumprindo a exigência do clube, quantos modelos de camisa podem ser confeccionados pela empresa?

a) 126

b) 122

c) 114

d) 112

e) 64

Comentários

O total de possibilidades sem a exigência é:

$$n_t = 2^7 = 128$$

Os casos que não podem ser considerados são os casos em que não há brancas entre pretas e vice-versa. Alguns exemplos:

$$P - preta$$

$$B - branca$$

$$PBBBBBB$$

$$PPBBBBB$$

$$PPPBBBB$$

Portanto, veja que não podemos ter uma sequência de P ou B dessa forma. Assim, temos que desconsiderar as seguintes combinações:

$$BBBBBBB$$
$$PBBBBBB$$
$$PPBBBBB$$
$$\vdots$$
$$PPPPPPB$$
$$PPPPPPP$$
$$BPPPPPP$$
$$BBPPPPP$$
$$\vdots$$
$$BBBBBBP$$
$$n = 128 - 14 = 114$$

Gabarito: C

---

2. (EN/2024)

Um jogador cansado de ganhar pouco dinheiro em jogos on-line, resolveu investir seus 20 mil reais aplicando em até 4 investimentos distintos possíveis: Poupança, Mercado de Ações, Títulos do Tesouro Nacional e Mercado Imobiliário. Considere que cada aplicação deve ser realizada em unidades de mil reais. Assim, assinale a opção que apresenta a quantidade de maneiras distintas de distribuir os 20 mil reais entre os investimentos.

a) 1771

b) 4772

c) 10626

d) 13781

e) 15852

Comentários

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 a quantidade de investimentos em Poupança, Mercado de Ações, Títulos de Tesouro Nacional e Mercado Imobiliário, respectivamente. Assim, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

Temos um problema de combinação completa:

$$n = P_{23}^{3,20} = \frac{23!}{3!\,20!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2} = 23 \cdot 11 \cdot 7 = 1771$$

Gabarito: A

---

3. (EN/2024)

Sabendo que o valor de $\log_6 30 = a$ e $\log_{15} 24 = b$, assinale a opção que apresenta o valor de $\log_{12} 60$ em função de a e b.

a) $\frac{ab+b-1}{ab-a+1}$

b) $\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$

c) $\frac{b+3-ab}{ab-1}$

d) $\frac{2a-b-2-ab}{ab-1}$

e) $\frac{1+a+b}{2+a}$

Comentários

Pede-se o valor de x tal que:

$$x = \log_{12} 60 = \log_{12}(12 \cdot 5) = 1 + \log_{12} 5 = 1 + \frac{\log 5}{\log(4 \cdot 3)} = 1 + \frac{\log 5}{2\log 2 + \log 3}$$

Usando as variáveis:

$$a = \log_6 30 = \log_6(6 \cdot 5) = 1 + \log_6 5 = 1 + \frac{\log 5}{\log 2 + \log 3} \quad (I)$$

$$b = \log_{15} 24 = \frac{\log(2^3 \cdot 3)}{\log(5 \cdot 3)} = \frac{3\log 2 + \log 3}{\log 3 + \log 5} \quad (II)$$

De I:

$$\log 5 = (a-1)(\log 2 + \log 3) \quad (III)$$

De II:

$$b = \frac{3\log 2 + \log 3}{\log 3 + (a-1)(\log 2 + \log 3)} = \frac{3\log 2 + \log 3}{a\log 6 - \log 2}$$

$$\Rightarrow ab(\log 2 + \log 3) - b\log 2 = 3\log 2 + \log 3$$

$$\log 3 = \frac{3 + b - ab}{ab - 1}\log 2$$

Em III:

$$\log 5 = \frac{(a-1)(b+2)}{ab-1}\log 2 \quad (IV)$$

Usando III e IV em x:

$$x = 1 + \frac{\frac{(a-1)(b+2)}{ab-1}\log 2}{2 + \frac{3+b-ab}{ab-1}\log 2} = 1 + \frac{ab + 2a - b - 2}{ab + b + 1}$$

$$\therefore x = \frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1}$$

Gabarito: B

---

4. **(EN/2024)**

Dois aspirantes A e B correm em uma pequena pista circular, e os tempos em cada volta completa são registrados em segundos (s). O aspirante A completou a 1ª volta em 7s, as duas primeiras voltas em 20s, as três primeiras voltas em 33s, as quatro primeiras voltas em 46s e assim sucessivamente mantendo a regularidade. O aspirante B completou a 1ª volta em 15s, as duas primeiras voltas em 34s, as três primeiras voltas em 53s, as quatro primeiras voltas em 72s e assim sucessivamente mantendo também a regularidade. Considere que os aspirantes começaram a corrida no mesmo instante e no mesmo ponto de partida. Calcule em quantos segundos, após a partida, os aspirantes se encontrarão pela 4ª vez no ponto de partida.

a) 779

b) 798

c) 805

d) 806

e) 813

Comentários

Os tempos de A e B seguem uma PA:

$$A: (7, 20, 33, 46, 59, 72, \dots) \rightarrow r = 13$$

$$B: (15, 34, 53, 72, \dots) \rightarrow r' = 19$$

Encontrando o MMC entre 13 e 19:

$$MMC(13,19) = 247$$

Assim, temos que a cada 247s temos um encontro. Como o primeiro encontro ocorreu no instante t = 72s, temos que o quarto ocorrerá em:

$$t = 72 + 3 \cdot 247 = 813$$

Gabarito: E

---

5. **(EN/2024)**

Seja f uma função polinomial, na variável x, de menor grau possível e coeficientes reais, tal que $f(1) = 2, f(4) = 3, f(3) = 4$ e $f(2) = 1$. Assim, é correto afirmar que f:

a) possui ponto de inflexão em $x = 5/2$.

b) possui um ponto de máximo absoluto em $x = 3$.

c) possui um ponto de mínimo absoluto em $x = 1$.

d) não é contínua em $x = 1$.

e) não possui máximo absoluto em $x \in [2, \infty)$

Comentários

Usando o polinômio interpolador de Lagrange:

$$p(x) = 2\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$+4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$p(x) = -\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)$$
$$-2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$p(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65x}{3} + 15$$
$$p'(x) = -4x^2 + 20x - \frac{65}{3}$$
$$p''(x) = -8x + 20 = 0$$
$$x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Portanto, o ponto de inflexão é $x = 5/2$.

Gabarito: A

---

6. **(EN/2024)**

Seja F uma função definida por $F(x) = \int_0^x f(t)dt\,, x \geq 0$, onde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 1, & t \geq 1 \end{cases}$. Assinale a opção que apresenta o valor de $F(3)$.

a) 9/2

b) 43/6

c) 3

d) -9

e) 13/3

Comentários

Calculando a integral definida:

$$F(3) = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^3 (t^2-1)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^3 = \frac{1}{2} + \frac{3^3}{3} - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{43}{6}$$

Gabarito: B

---

7. **(EN/2024)**

O valor da soma $\sum_{k=1}^{2023} tg(k)tg(k+1)$ é igual a

a) $\frac{tg(2023)}{tg(1)} + 2023$

b) $\frac{tg(2023)}{tg(1)} - 2023$

c) $\frac{tg(2024)}{tg(1)} + 2024$

d) $\frac{tg(2024)}{tg(1)} - 2024$

e) $tg(2023) - tg(2024)$

Comentários

Usando a transformação trigonométrica:

$$tg(k+1-k) = \frac{tg(k+1) - tg(k)}{1 + tg(k+1)tg(k)}$$

$$tg(1) + tg(1)tg(k+1)tg(k) = tg(k+1) - tg(k)$$

$$tg(k+1)tg(k) = \frac{tg(k+1) - tg(k)}{tg(1)} - 1$$

A soma é:

$$S = \sum_{k=1}^{2023} tg(k)tg(k+1) = \sum_{k=1}^{2023}\left[\frac{tg(k+1) - tg(k)}{tg(1)} - 1\right] = \frac{1}{tg(1)}\sum_{k=1}^{2023}[tg(k+1) - tg(k)] - \sum_{k=1}^{2023} 1$$

$$S = \frac{tg(2024) - tg(1)}{tg(1)} - 2023 = \frac{tg(2024)}{tg(1)} - 2024$$

Gabarito: D

---

8. **(EN/2024)**

Uma hipérbole tem os eixos transverso e conjugado contidos nos eixos coordenados e contém os pontos médios dos lados do quadrilátero, cujos vértices são as intersecções da elipse, de equação $9x^2 + y^2 = 36$, com os eixos coordenados. Sabendo que as coordenadas de um dos focos da hipérbole é $\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, 0\right)$, assinale a opção que apresenta uma das equações das assíntotas dessa hipérbole.

a) $y = \sqrt{3x}$

b) $y = -\sqrt{13x}$

c) $y = -2\sqrt{3x}$

d) $y = 13x$

e) $y = 3x$

Comentários

Os pontos que formam o quadrilátero são dados por:

$$9x^2 + y^2 = 36$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Assim, temos os vértices:

$$(2,6), (2,-6), (-2,6), (-2,-6)$$

Os pontos médios são:

$$(1,3), (1,-3), (-1,3), (-1,-3)$$

Por simetria, temos que a hipérbole possui centro na origem. Além disso, como o foco pertence ao eixo das abcissas, temos que o eixo real é horizontal, logo sua equação é:

$$F_1\left(\frac{\sqrt{13}}{2},0\right) \Rightarrow c = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Usando os pontos médios:

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 + \frac{9}{b^2} \therefore a^2 = \frac{b^2}{b^2+9}\ (I)$$

Usando a relação fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{13}{4}\ \ (II)$$

Usando a relação I em II:

$$\frac{b^2}{b^2+9} + b^2 = \frac{13}{4}$$

$$\frac{b^4 + 10b^2}{b^2+9} = \frac{13}{4}$$

$$4b^4 + 40b^2 = 13b^2 + 117$$

$$4b^4 + 27b^2 - 117 = 0$$

$$b^2 = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4(4)(-117)}}{8} = \frac{-27 \pm 51}{8}$$

Como $b^2 > 0$:

$$b^2 = \frac{24}{8} = 3 \therefore b = \sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{13}{4} - b^2 = \frac{1}{4} \therefore a = \frac{1}{2}$$

As equações das assíntotas têm a forma:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

$$y = \pm 2\sqrt{3}x$$

*Essa questão é passível de anulação, uma vez que nas alternativas o x está dentro da raiz quadrada e isso não condiz com a resposta correta.

Gabarito: C

---

9. (EN/2024)

Sejam i a unidade imaginária e o complexo Z que satisfaz a igualdade $4|Z| = |Z - 1 - 2i|$. A soma dos números reais Z que satisfazem a igualdade é igual a:

a) -2

b) -1

c) -2/15

d) -1/45

e) -1/5

Comentários

Como Z é real, temos:

$$Z = x \in \mathbb{R}$$

$$4|x| = |x - 1 - 2i|$$

$$16x^2 = (x-1)^2 + 4$$

$$15x^2 + 2x - 5 = 0$$

Por Girard:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{15}$$

Gabarito: C

---

10. (EN/2024)

Considere um triângulo T_1, de área w. Os comprimentos as medianas de T_1, são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_2, os comprimentos das medianas de T_2 são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_3 e assim sucessivamente, ou seja, a construção dos lados triângulo T_{n+1} é realizada a partir dos comprimentos das medianas do triângulo T_n. Sendo assim, se w = 3, é correto afirmar que a soma de todas as áreas dos T_n, com $n \to \infty$, é um:

a) número racional não inteiro.

b) quadrado perfeito.

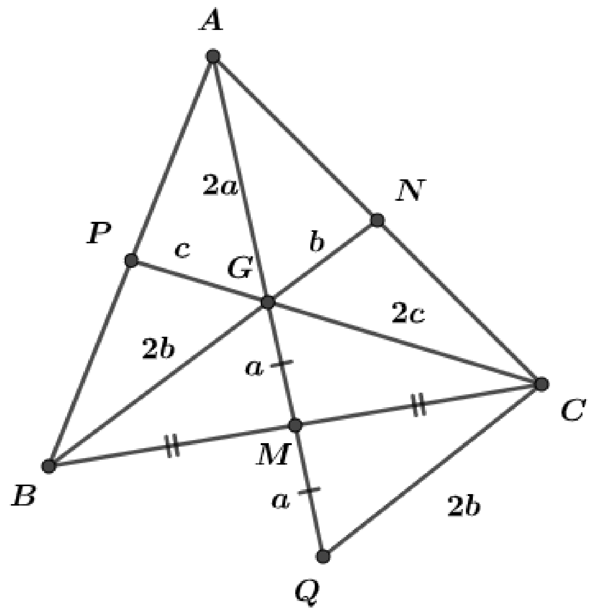
c) número primo.

d) número irracional.

e) número par.

Comentários

Considere a seguinte figura que ilustra T_1:



As medianas têm medidas $2a, 2b, 2c$. Sabemos que as medianas dividem o triângulo em 6 áreas iguais a S, logo:

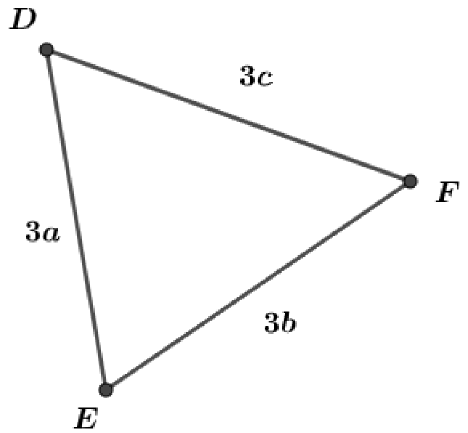
$$w = 6S$$

Sabemos que o baricentro divide as medianas na razão 2:1. Traçando o segmento auxiliar MQ de forma que MQ = GM, temos que M é ponto médio de GQ e BC, logo BQCG é paralelogramo, ou seja, QC = BG = 2b.

Além disso, como M é ponto médio de GQ, temos:

$$[GMC] = [MCQ] = S$$

O triângulo GCQ de lados $2a, 2b, 2c$ tem área $2S$.



Pelo critério de semelhança LLL, o triângulo T_2 dado por DEF é semelhante ao triângulo GQC, logo:

$$\frac{[GQC]}{[DEF]} = \left(\frac{2a}{3a}\right)^2 \Rightarrow \frac{2S}{[DEF]} = \frac{4}{9} \therefore [DEF] = \frac{9S}{2}$$

Portanto, as áreas dos triângulos formados dessa forma formarão uma PG cuja razão é:

$$q = \frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{\left(\frac{9S}{2}\right)}{6S} = \frac{3}{4}$$

A soma das áreas é a soma da PG infinita com primeiro termo w e razão q:

$$Soma = \frac{w}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{3}{4}} = 12$$

Gabarito: E

---

11. (EN/2024)

Um cilindro circular reto de raio r e altura h possui volume igual a 300 cm^3. Sabendo que o cilindro possui menor área total possível, a altura h, em cm, é aproximadamente igual a:

a) 7,25

b) 6,90

c) 6,15

d) 3,63

e) 2,00

Comentários

O volume é:

$$V = \pi r^2 h = 300 \therefore h = \frac{300}{\pi r^2}$$

A área total é:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{300}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$$

Para minimizar a área, podemos usar a desigualdade das médias:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{2\pi r^2 + \frac{300}{r} + \frac{300}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{300}{r} \cdot \frac{300}{r}}$$

O mínimo ocorre para a igualdade das desigualdades, portanto, as variáveis devem ser iguais:

$$2\pi r^2 = \frac{300}{r} \therefore r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

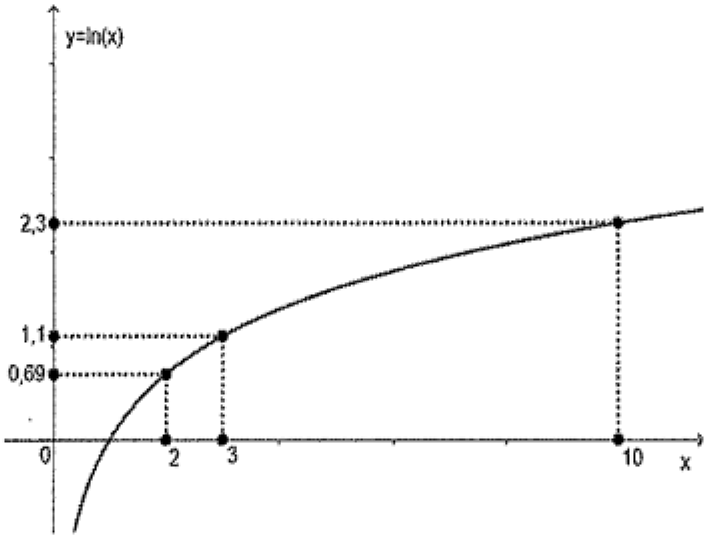
A altura é:

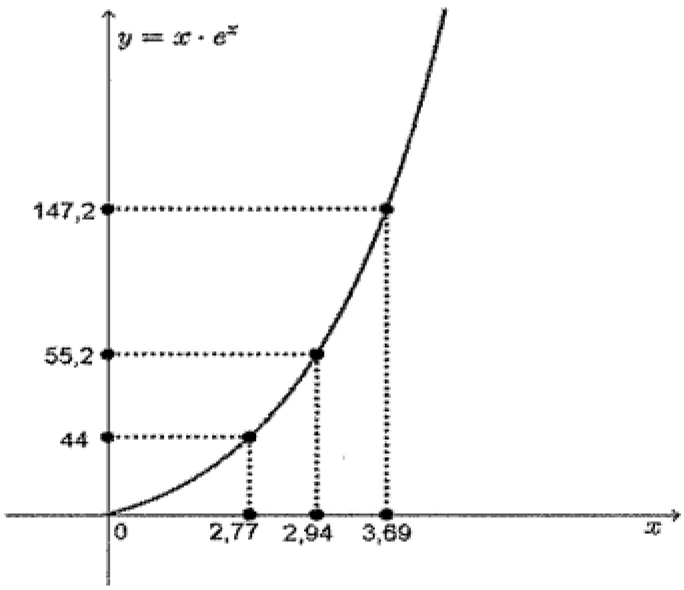
$$h = \frac{300}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^2} \approx 7,25$$

Gabarito: A

12. (EN/2024)

Analise os gráficos a seguir.





Seja um número real positivo x, tal que $\frac{40}{x} = 4^x$, e utilizando os dados dos gráficos, apresentados acima, das funções definidas por $y = xe^x$ e $y = \ln(x)$, é correto afirmar que o valor de x é aproximadamente igual a:

a) 1,60

b) 1,96

c) 2,13

d) 2,24

e) 2,52

Comentários

Usando a seguinte relação:

$$4^x = e^{\ln(4^x)} = e^{x ln(4)}$$

$$\frac{40}{x} = 4^x = e^{x ln(4)}$$

$$40 = x e^{x ln(4)}$$

$$40\ln(4) = \big(x ln(4)\big) e^{x ln(4)}$$

Do gráfico, temos:

$$\ln(4) = \ln 2^2 = 2\ln(2) = 2(0{,}69)$$

$$40(\ln(4)) = 40(2)(0{,}69) = 55{,}2$$

Sabemos que:

$$x e^x = 55{,}2 \Rightarrow x = 2{,}94$$

$$\big(x ln(4)\big) e^{x ln(4)} = 55{,}2$$

Portanto:

$$x ln(4) = 2{,}94$$

$$x = \frac{2{,}94}{2(0{,}69)} \approx 2{,}13$$

Gabarito: C

---

13. (EN/2024)

Se $x > 0$, seja $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$, em que A é uma constante positiva. Assinale a opção que apresenta o menor valor de A tal que $f(x) \geq 24, \forall x > 0$.

a) $\frac{2^{11}3^3}{7^3}\sqrt{\frac{6}{7}}$

b) $\frac{2^3 3^{11}}{7^{11}}\sqrt{\frac{7}{6}}$

c) 2^8

d) $\frac{2^7 3^{11}}{7^{11}}\sqrt{\frac{2}{3}}$

e) $\frac{2^8 3^{-7}}{7^{-3}}\sqrt{\frac{3}{2}}$

Comentários

Usando a desigualdade das médias:

$$MA \geq MG$$

$$f(x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + \frac{A}{2x^5} + \frac{A}{2x^5}$$

$$\frac{\left(x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+\frac{A}{2x^5}+\frac{A}{2x^5}\right)}{7} \geq \sqrt[7]{x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot \frac{A}{2x^5}\cdot\frac{A}{2x^5}}$$

$$f(x) \geq 7\sqrt[7]{\frac{A^2}{4}}$$

Como $f(x) \geq 24, \forall x > 0$ e A deve ser mínimo, devemos ter:

$$7\sqrt[7]{\frac{A^2}{4}} = 24$$

$$\frac{A^2}{4} = \left(\frac{2^3\cdot 3}{7}\right)^7$$

$$\therefore A = \frac{2^{11}3^3}{7^3}\sqrt{\frac{6}{7}}$$

Gabarito: A

---

14. (EN/2024)

Na Escola Naval, um oficial afirmou que: "Se todos os navios estão fundeados, então hoje é dia de licença pagamento ou os nautas não estão de serviço".

Assinale a opção que apresenta a afirmativa que equivale à afirmação do oficial.

a) Se todos os navios não estão fundeados, então hoje não é dia de licença pagamento ou os nautas estão de serviço.

b) Se hoje não é dia de licença pagamento e os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.

c) Se hoje é dia de licença pagamento ou os nautas não estão de serviço, então todos os navios estão fundeados.

d) Se hoje não é dia de licença pagamento ou os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.

e) Se hoje é dia de licença pagamento e os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.

Comentários

Sejam p, q e r as afirmações da questão:

p: todos os navios estão fundeados

q: hoje é dia de licença pagamento

r: os nautas não estão de serviço

A sentença é:

$$p \to (q \vee r) \Leftrightarrow \sim(q \vee r) \to \sim p \Leftrightarrow \sim q \wedge \sim r \to \sim p$$

Assim, temos:

~p: há navio que não está fundeado

~q: hojé não é dia de licença pagamento

~r: os nautas estão de serviço

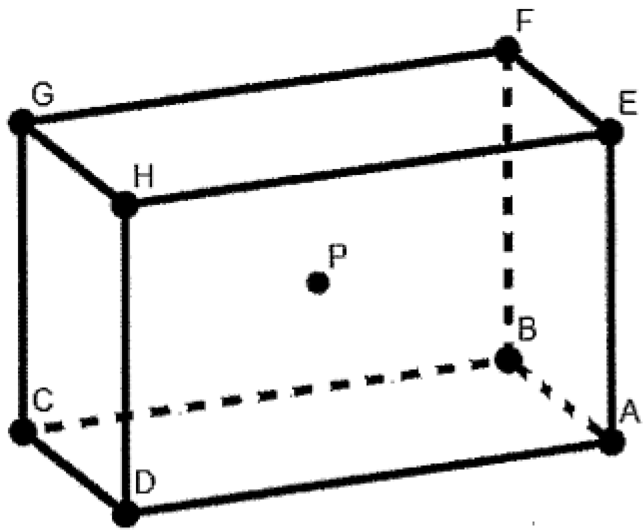
Logo, a afirmação equivalente é:

"Se hoje não é dia de licença pagamento e os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado."

Gabarito: B

15. (EN/2024)

Analise a figura a seguir.



Seja o paralelepípedo reto retângulo ABCDEFGH com medidas AB = 4cm, AD = 8cm e AE = 5cm, conforme a figura acima. Considerando o ponto P como o centro do paralelepípedo, é correto afirmar que a distância, em cm, de P ao plano BDE é igual a:

a) $\frac{10}{\sqrt{189}}$

b) $\frac{20}{\sqrt{189}}$

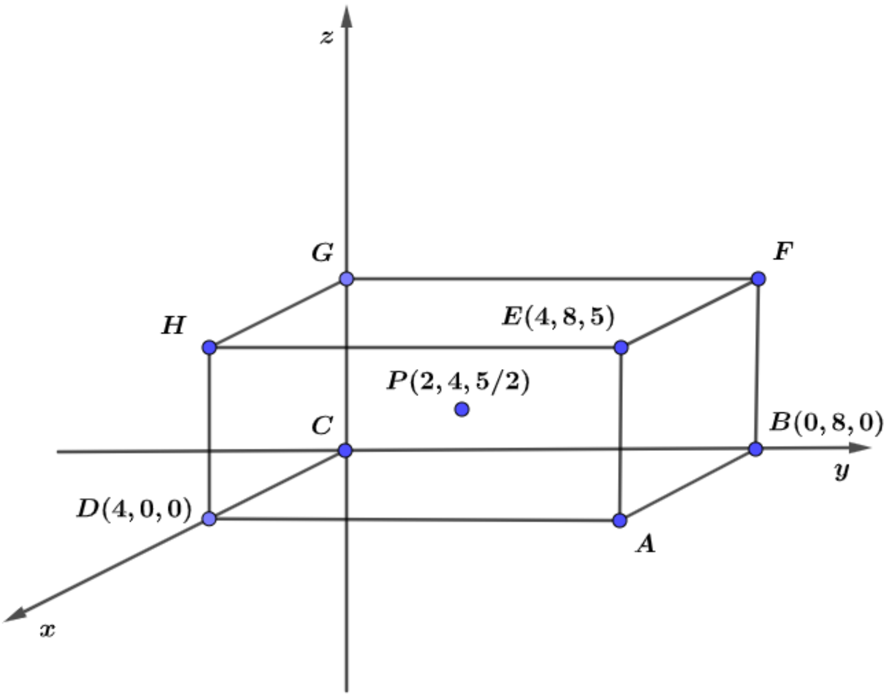
c) $\frac{35}{2\sqrt{105}}$

d) $\frac{30}{\sqrt{189}}$

e) $\frac{35}{\sqrt{105}}$

Comentários

Inserindo a figura no espaço cartesiano, encontramos:



O plano DBE é dado por:

$$E(4,8,5)$$

$$B(0,8,0)$$

$$D(4,0,0)$$

$$P\left(2,4,\frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = E - D = (0, 8, 5)$$

$$\overrightarrow{DB} = B - D = (-4, 8, 0)$$

$$\overrightarrow{DE}x\overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 8 & 5 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -40i - 20j + 32k$$

O vetor normal ao plano é:

$$\vec{n} = -10i - 5j + 8k$$

Seja α o plano formado pelos pontos DBE, logo:

$$\alpha: -10x - 5y + 8z + d = 0$$

$$B(0, 8, 0) \rightarrow -5 \cdot 8 + d = 0 \therefore d = 40$$

$$\alpha: -10x - 5y + 8z + 40 = 0$$

A distância de P ao plano é:

$$d = \frac{\left|-10(2) - 5(4) + 8\left(\frac{5}{2}\right) + 40\right|}{\sqrt{10^2 + 5^2 + 8^2}} = \frac{20}{\sqrt{189}}$$

Gabarito: B

16. (EN/2024)

Considere que um jogador do jogo eletrônico *Call of Duty Warzone*, sabedor de matemática, foi questionado por seus amigos sobre quantas unidades de área da região do campo de batalha devem ser vasculhadas para encontrar os últimos inimigos a serem derrubados para que, assim, eles vençam a partida. O jogador respondeu: supondo que a região do campo de batalha que todos estejam ocupando seja totalmente plana, o valor da área que deve ser vasculhada é igual ao valor da área do polígono convexo cujos vértices são os pares cartesianos da solução do sistema $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}$. Desse modo, assinale a opção que apresenta o valor da área dessa região dita pelo jogador.

a) 255

b) 260

c) 265

d) 270

e) 275

Comentários

Subtraindo as equações do sistema:

$$x^2 - y^2 = 9x - 9y$$

$$(x + y)(x - y) = 9(x - y)$$

As possibilidades são:

1) $x - y = 0$

$$x = y$$

$$x^2 = 13x + 4y \Rightarrow x^2 = 13x + 4x = 17x \Rightarrow x^2 - 17x = 0 \therefore \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 17 \end{cases}$$

2) $x + y = 9$

$$y = 9 - x$$

$$x^2 = 13x + 4(9 - x)$$

$$x^2 - 9x - 36 = 0$$

$$(x - 12)(x + 3) = 0$$

Logo:

$$x = 12 \; e \; y = -3$$

$$x = -3 \; e \; y = 12$$

Os pontos formam um quadrilátero ABCD tal que:

$$A(0,0); B(12,-3); C(17,17); D(-3,12)$$

A área é:

$$[ABCD] = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 12 & -3 \\ 17 & 17 \\ -3 & 12 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\| = 255$$

Gabarito: A

17. (EN/2024)

Na partida de futebol entre Alemanha e Japão na Copa do Mundo de 2022, no lance que originou o segundo gol do Japão, por 1,88mm, a bola não passou totalmente pela linha de fundo (linha branca), como mostram as figuras 1, 2 e 3 apresentadas abaixo.

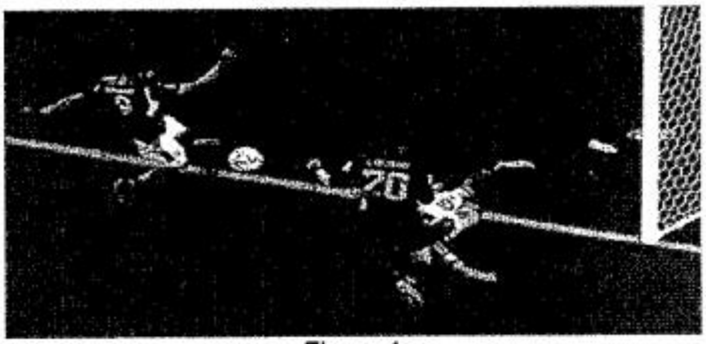


Figura 1

(Fonte:www.mirror.co.uk/sport/football/news/fifa-statement-japan-goal-germany-28641190)

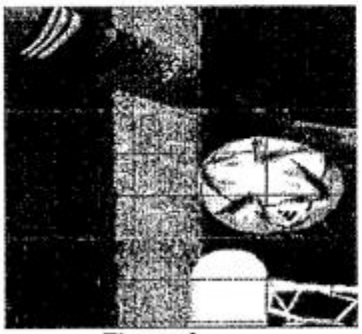


Figura 2

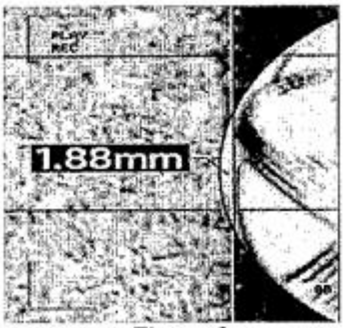


Figura 3

(Fonte:www.facebook.com/SuperLigInternationalOrginal/photos/a.1384593458432250/3447555148802727)

Sabe-se que a parte da bola sobre a linha branca equivale a uma calota esférica de altura 1,88mm e volume V_C. Considerando a bola de futebol uma esfera de raio 70cm e volume V, assinale a opção que apresenta corretamente a relação entre V e V_C.

a) 0,1% de V < V_C < 1% de V

b) 0,01% de V < V_C < 0,1% de V

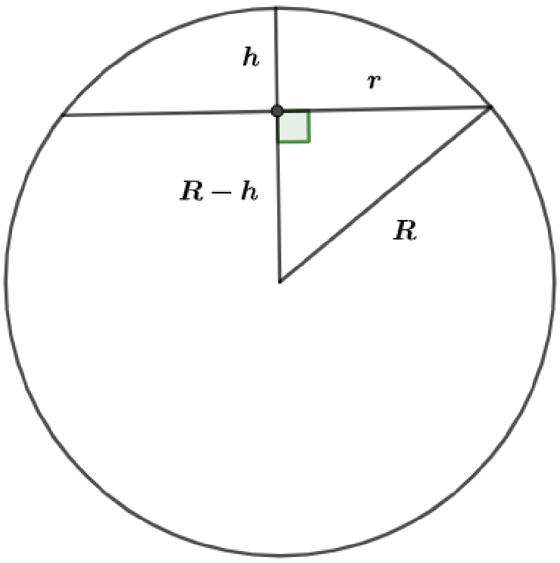
c) 0,001% de V < V_C < 0,01% de V

d) 0,0001% de V < V_C < 0,001% de V

e) V_C < 0,0001% de V

Comentários

A seguinte figura ilustra as variáveis da calota esférica de altura h e raio r:



O volume da calota é:

$$V_C = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + (R-h)^2 \therefore r^2 = 2Rh - h^2 = h(2R-h)$$

O volume da esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

A razão entre V_C e V é:

$$\frac{V_C}{V} = \frac{\frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{h}{8R^3}(3h(2R-h) + h^2) = \frac{h^2}{8R^3}(6R - 2h) = \frac{h^2}{4R^3}(3R - h)$$

Usando h = 0,188cm e R = 70 cm, temos:

$$\frac{V_C}{V} = \frac{0{,}188^2}{4(70)^3}(3 \cdot 70 - 0{,}188) \approx \frac{0{,}188^2}{4(70)^3}(3 \cdot 70) = \frac{0{,}188^2}{4(70)^2}(3) \approx 5 \cdot 10^{-6}$$

Logo:

$$V_C \approx 5 \cdot 10^{-4}\%\, V$$

$$0{,}0001\%V < V_C < 0{,}001\%V$$

Gabarito: D

---

18. (EN/2024)

Assinale a opção que apresenta o resultado de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+9}{4x+1}\right)^{4x+4}$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) e^{-1}

d) $e^{-\frac{3}{4}}$

e) 0

Comentários

Resolvendo o limite:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+9}{4x+1}\right)^{4x+4} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + \frac{9}{x}}{4 + \frac{1}{x}}\right)^{4x+4}$$

Note que quando $x \to +\infty$, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + \frac{9}{x}}{4 + \frac{1}{x}}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (4x + 4) = +\infty$$

Portanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + \frac{9}{x}}{4 + \frac{1}{x}}\right)^{4x+4} \to \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} \to 0$$

Gabarito: E

---

19. (EN/2024)

Seja a reta r oblíqua a um plano ϕ pelo ponto A. Considere que a reta $s \subset \phi$ é a projeção ortogonal de r sobre ϕ e a reta $t \subset \phi$ que passa por A. Se θ é o ângulo entre r e s, β é o ângulo entre r e t, assinale a opção que apresenta a correta relação entre esses ângulos.

a) $\theta < \beta$

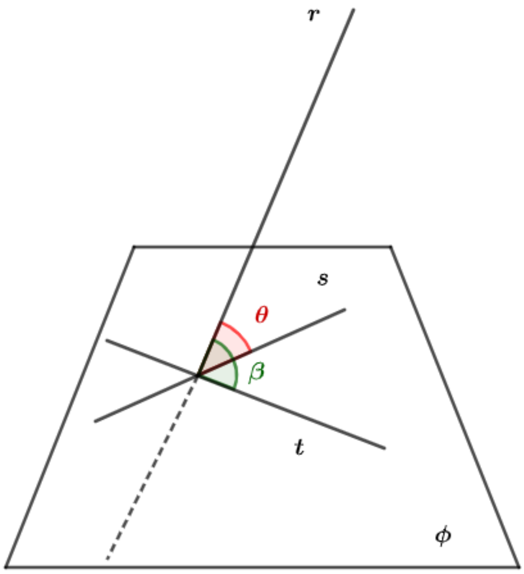
b) $\theta = \beta$

c) $\beta < \theta$

d) $\theta = 2\beta$

e) $2\beta < \theta$

Comentários



Como a reta s é a projeção ortogonal de r no plano, temos que θ é o menor ângulo entre r e o plano, logo:

$$\theta < \beta$$

Gabarito: A

---

20. (EN/2024)

Sejam as matrizes A e B, ambas de ordem 4x4, com $\det A = -1$ e $\det B = 2$. Calcule o determinante da matriz X sabendo que $A^{-1}B^TX = 2A^T$ e assinale a opção correta.

a) -8

b) 8

c) -16

d) 16

e) 32

Comentários

Aplicando o teorema de Binet:

$$\det(A^{-1}B^TX) = \det(2A^T)$$

$$\det(A^{-1})\det(B^T)\det X = 2^4\det(A^T)$$

$$\frac{1}{\det A}\det B \det X = 2^4 \det A$$

$$\frac{1}{-1}(2)\det X = 2^4(-1)$$

$$\det X = 2^3 = 8$$

Gabarito: B

---

21. (EN/2024)

Considere que parte real e imaginária de um número complexo z sejam denotadas, respectivamente, por Re(z) e Im(z). Sejam z, z_1 e z_2 números complexos em que z_1 e z_2 satisfazem a equação $z^2 + (1-i)z - 3i = 0$, onde i é a unidade imaginária. Sobre z_1 e z_2, é correto afirmar que:

a) $Im(z_1 + z_2) = 0$

b) $Re(z_1 + z_2) = 0$

c) $Im(z_1)Im(z_2)$ é um número irracional.

d) $Re(z_1)Re(z_2)$ é um número irracional.

e) $Im(z_1 + z_2) + Re(z_1 + z_2) = 0$

Comentários

Usando as relações de Girard:

$$z^2 + (1-i)z - 3i = 0$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -1 + i$$

Assim, temos:

$$Re(z_1 + z_2) = -1$$

$$Im(z_1 + z_2) = 1$$

$$Re(z_1 + z_2) + Im(z_1 + z_2) = -1 + 1 = 0$$

Gabarito: E

---

22. (EN/2024)

Considere que um navio de guerra da Marinha do Brasil danificou o radar de um navio inimigo com um tiro de canhão 50mm. O radar do navio inimigo passou a detectar apenas numa região angular que é solução de $sen(x) + \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo x real. Se o radar do navio inimigo tem um poder de alcance que está dentro da região da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$, com $R \leq 100km$, assinale a opção que apresenta a área total de alcance desse radar em que não será possível detectar o navio de guerra da Marinha do Brasil.

a) $\frac{\pi}{3}R^2 km^2$

b) $\frac{\pi}{12}R^2 km^2$

c) $\frac{2\pi}{3}R^2 km^2$

d) $\frac{3\pi}{4}R^2 km^2$

e) $\frac{5\pi}{6}R^2 km^2$

Comentários

Resolvendo a inequação:

$$sen(x) + \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$sen(x + 45°) \geq \frac{1}{2}$$

A solução real é dada por:

$$30° + 360°k \leq x + 45° \leq 150° + 360°k$$

$$-15° + 360°k \leq x \leq 105° + 360°k$$

Assim, temos que a área da região o radar detecta corresponde a um setor circular de ângulo central dado por:

$$\theta = 105° - (-15°) = 120°$$

A área total que o radar não detecta é dada por:

$$A = \frac{360° - 120°}{360°}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^2$$

Gabarito: C