Estratégia
Militares

Correção

Prova IME 2023

Prof. Victor So

Prova Resolvida

1. (IME/2023)

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Seja X^T a transposta da matriz X. Sabendo que $X^T A^{-1} = B$ então X^{-1} é

a) $-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 39 & -11 \end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -39 & 12 \end{pmatrix}$

c) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 12 & -39 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

d) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 39 & -11 \end{pmatrix}$

e) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 11 & 39 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$

Comentários

Da equação:

$$X^T A^{-1} A = BA$$

$$X^T = BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 39 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\det X = 12 \cdot 11 - 39 \cdot 5 = -63$$

$$X^{-1} = -\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 11 & -39 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -39 & 12 \end{pmatrix}$$

Gabarito: B

---

2. (IME/2023)

Seja $f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ valem as seguintes desigualdades

$$f(x+7) \geq f(x) + 7 \text{ e } f(x+1) \leq f(x) + 1$$

Se $g(x) = f(x-1) - x + 2$, o valor de $g(2023)$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 2022

e) 2023

Comentários

Analisando as desigualdades:

$$f(x+7) \geq f(x) + 7$$
$$\Rightarrow f(x) \geq f(x-7) + 7$$
$$\therefore f(x-7) \leq f(x) - 7$$

Para a desigualdade $f(x+1) \leq f(x) + 1$, temos:

$$f(x) \leq f(x-1) + 1$$
$$f(x-1) \leq f(x-2) + 1$$
$$f(x-2) \leq f(x-3) + 1$$
$$\vdots$$
$$f(x-6) \leq f(x-7) + 1$$

Somando todas essas inequações, obtemos:

$$f(x) \leq f(x-7) + 7$$
$$\Rightarrow f(x) - 7 \leq f(x-7)$$

Assim, concluímos:

$$f(x-7) \leq f(x) - 7 \leq f(x-7)$$

Logo, temos a igualdade:

$$f(x-7) = f(x) - 7$$

Como ocorre a igualdade, temos da desigualdade inicial:

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

Para $f(1) = 1$, podemos provar que $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Usando PIF:

$$H: f(k) = k, k \in \mathbb{N}$$
$$T: f(k+1) = k + 1$$

Da equação:

$$x = k \Rightarrow f(k+1) = f(k) + 1 = k + 1$$

Logo, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}$.

A questão pede:

$$g(2023) = f(2022) - 2023 + 2 = 2022 - 2021 = 1$$

Gabarito: B

---

3. (IME/2023)

Considere os conjuntos de números complexos:

$$A = \{x + iy \ tal \ que \ x, y \in \mathbb{R} \ e \ |x| + |y| \leq r\} \text{ e}$$
$$B = \{x + iy \ tal \ que \ x, y \in \mathbb{R} \ e \max\{|x-a|, |y-b|\} \leq c\},$$

onde r, a, b e c são números reais positivos e $\max\{x_1, x_2\}$ é o maior valor entre os reais x_1 e x_2. O menor valor de r, em função de a, b e c, para que se tenha $B \subset A$ é:

a) $a+b+c$

b) $(a+b)\sqrt{2}+c$

c) $2(a+b)+c$

d) $a+b+2c$

e) $2(a+b+c)$

Comentários

O conjunto A é representado pelos pontos interiores de um quadrado:

$$|x|+|y|\leq r$$

1) $x\geq 0, y\geq 0$

$$x+y\leq r\Rightarrow y\leq -x+r$$

2) $x\leq 0, y\geq 0$

$$-x+y\leq r\Rightarrow y\leq x+r$$

3) $x\leq 0, y\leq 0$

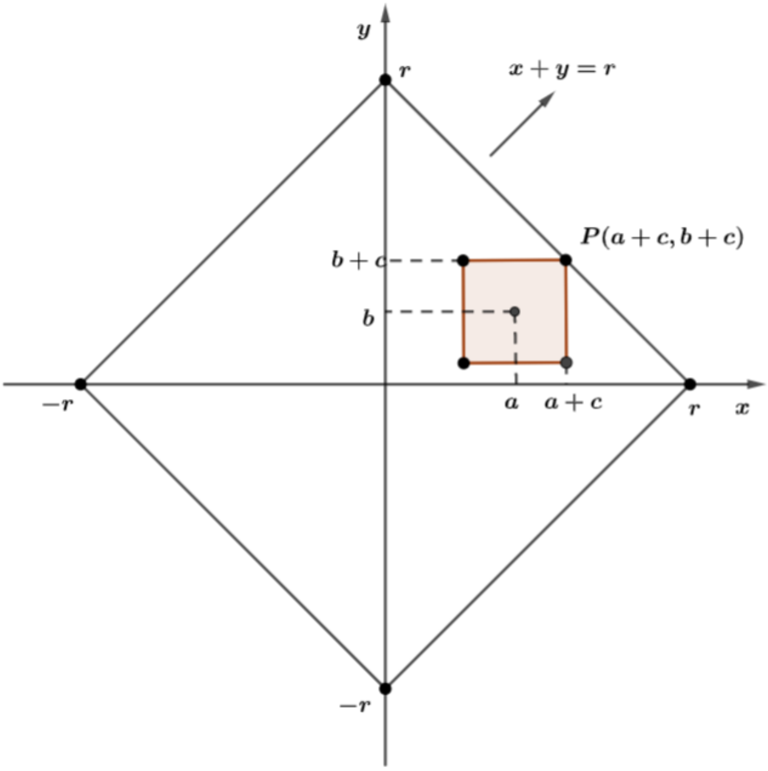
$$-x-y\leq r\Rightarrow y\geq -x-r$$

4) $x\geq 0, y\leq 0$

$$x-y\leq r\Rightarrow y\geq x-r$$

O conjunto B é representado por um quadrado de lados paralelos aos eixos real e imaginário, com centro em (a,b) e lado de medida $2c$.

Representando os conjuntos para que $B\subset A$:



Assim, devemos ter:

$$P \in x + y = r$$

$$a + c + b + c = r$$

$$r = a + b + 2c$$

Gabarito: D

---

4. **(IME/2023)**

A equação $arctg(z) + arctg(z + 1) = arctg\left(\frac{4}{3}\right)$, em que $arctg(x)$ é o arco tangente de x, apresenta:

a) duas soluções reais sendo uma positiva e outra negativa.

b) duas soluções reais positivas.

c) duas soluções reais negativas.

d) uma única solução real, sendo esta positiva.

e) uma única solução real, sendo esta negativa.

Comentários

Sabemos que a imagem da função arco tangente é:

$$arctg(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$arctg\left(\frac{4}{3}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha = arctg(z) \Rightarrow tg\alpha = z$$

$$\beta = arctg(z+1) \Rightarrow tg\beta = z+1$$

$$\alpha + \beta = arctg\left(\frac{4}{3}\right)$$

Condição dos arcos:

$$\Rightarrow (\alpha+\beta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando a função tangente:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(2z+1)}{1 - z(z+1)} = \frac{4}{3}$$

$$4z^2 + 10z - 1 = 0$$

Encontrando as raízes e analisando se podem ser solução:

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{4}$$

$$z = \frac{-5+\sqrt{29}}{4} > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \; e \; z+1 = \frac{-1+\sqrt{29}}{4} > 0 \Rightarrow \beta > 0$$

$$\alpha + \beta > 0$$

Verificando a outra raiz:

$$z = \frac{-5-\sqrt{29}}{4} < 0 \Rightarrow \alpha < 0 \; e \; z+1 = \frac{-1-\sqrt{29}}{4} < 0 \Rightarrow \beta < 0$$

$$\alpha + \beta < 0 \; (não \; convém)$$

Portanto, temos apenas uma solução real positiva.

Gabarito: D

---

5. (IME/2023)

Dez números reais formam uma progressão geométrica (PG) com razão $q > 1$. Removem-se ao acaso cinco desses números. A probabilidade de que os cinco números restantes estejam em PG é

a) $1/252$

b) $1/126$

c) $3/126$

d) $2/63$

e) $3/63$

Comentários

Analisando os casos favoráveis:

$$PG(a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^9)$$

Para $q_1 = q$, temos as seguintes possibilidades:

$$(a, aq, aq^2, aq^3, aq^4)$$
$$(aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5)$$
$$(aq^2, \dots, aq^6)$$
$$(aq^3, \dots, aq^7)$$
$$(aq^4, \dots, aq^8)$$
$$(aq^5, \dots, aq^9)$$

Assim, temos 6 possibilidades.

Para $q_2 = q^2$:

$$(a, aq^2, aq^4, aq^6, aq^8)$$
$$(aq, aq^3, aq^5, aq^7, aq^9)$$

Nesse caso, temos apenas 2 possibilidades.

Não é possível formar PG de razão maior que q^2. O total de casos favoráveis é $6 + 2 = 8$.

O total de casos possíveis é:

$$n_{total} = \binom{10}{5} = 9 \cdot 7 \cdot 4$$

A probabilidade é:

$$p = \frac{8}{9 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{2}{63}$$

Gabarito: D

---

6. **(IME/2023)**

Seja um tetraedro de vértices A, B, C e D. São dados os ângulos em radianos:

$$A\widehat{D}B = \frac{\pi}{3} \ e \ C\widehat{D}B = A\widehat{D}C = \frac{\pi}{2}$$

e os comprimentos das arestas em centímetros $\overline{CD} = 3$ e $\overline{AD} = \overline{BD} = 4$.

A distância em centímetros do ponto D ao plano ABC é

a) $6\sqrt{7}/7$

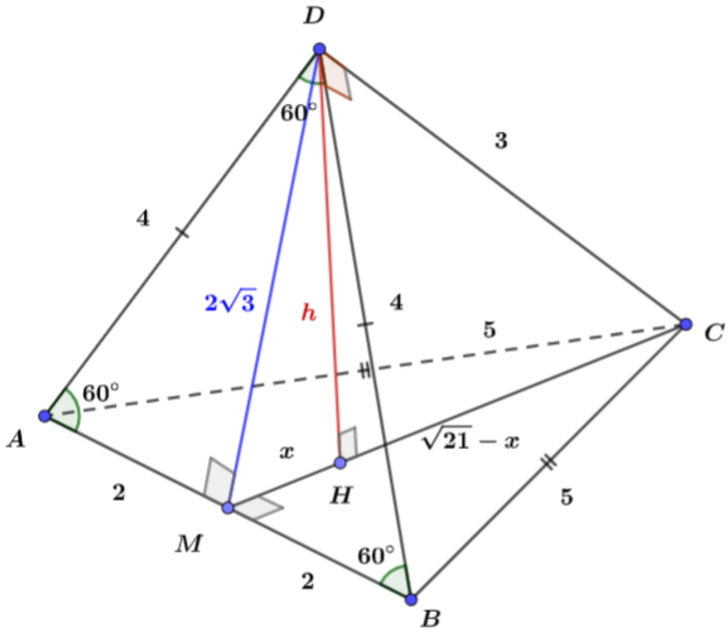
b) 3

c) $2\sqrt{3}$

d) 4

e) 5

Comentários



Como $AD = BD = 4$ e $ADB = 60°$, temos que ΔABD é equilátero. Logo:

$$AM = MB = 2$$

$$DM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

As faces ADC e BDC são triângulos retângulos. Aplicando Pitágoras, encontramos:

$$AC = BC = 5$$

Aplicando Pitágoras no ΔBMC:

$$MC = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Para $MH = x$, temos $HC = \sqrt{21} - x$.

Aplicando Pitágoras nos triângulos DMH e DHC:

$$x^2 + h^2 = 12 \ \ (i)$$

$$\left(\sqrt{21} - x\right)^2 + h^2 = 9 \ \ (ii)$$

Subtraindo as equações:

$$x^2 - \left(\sqrt{21} - x\right)^2 = 3$$

$$2\sqrt{21}x - 21 = 3$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{21}}$$

Substituindo em (i):

$$h^2 = 12 - x^2 = 12 - \frac{12^2}{21} = \frac{12 \cdot 9}{21} = \frac{(4 \cdot 9)}{7}$$

$$\therefore h = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

Gabarito: A

---

7. (IME/2023)

A soma dos inversos das soluções inteiras da equação

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

é

a) 0

b) $-19/30$

c) -15

d) 15

e) $19/30$

Comentários

Calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

Note que 2 é raiz. Aplicando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -19 & 30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+2x-15) = 0$$

$$(x-2)(x+5)(x-3) = 0$$

As raízes são $x \in \{2, 3, -5\}$. A soma dos inversos é:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}$$

Gabarito: E

---

8. (IME/2023)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Então:

a) $f(x)$ é uma função par.

b) $f(x)$ é uma função ímpar.

c) $f(2x) > f(x)$ para todo $x \neq 0$.

d) $f(x)$ tem duas raízes reais.

e) $f(x)$ não tem raiz real.

Comentários

Calculando $f(-x)$:

$$f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = \log\left[\frac{\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(-x - \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(-x - \sqrt{x^2+1}\right)}\right]$$

$$f(-x) = \log\left[\frac{-1}{\left[\left(-x - \sqrt{x^2+1}\right)\right]}\right] = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

Portanto, f é ímpar.

Gabarito: B

---

9. (IME/2023)

Um polígono regular possui $2n$ vértices $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$. Escolhem-se ao acaso 4 vértices do polígono, formando o quadrilátero ABCD. A probabilidade de ABCD ser um retângulo é:

a) $\frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}}$

b) $\frac{n-1}{\binom{2n}{4}}$

c) $\frac{\binom{n+2}{4}}{\binom{2n}{4}}$

d) $\frac{\binom{2n}{2}}{6\binom{2n}{4}}$

e) $\frac{n^2+2n+4}{12\binom{2n}{4}}$

Comentários

Para formar os retângulos usando os vértices do polígono regular, basta dividir o polígono ao meio e escolher 2 vértices dos n vértices possíveis. Os outros 2 vértices que formarão os retângulos já estarão definidos. O número de casos favoráveis é:

$$n_{favorável} = \binom{n}{2}$$

O total de casos possíveis é dado pela escolha de 4 vértices dentre os $2n$ disponíveis:

$$n_{possíveis} = \binom{2n}{4}$$

A probabilidade é:

$$p = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}}$$

Gabarito: A

---

10. (IME/2023)

Considere um ponto P cujas coordenadas $(x, y), x, y \in \mathbb{R}$, satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 4\,cossec(\alpha)x - 6\,cotg(\alpha)y = 4\,sen(\alpha) \\ 12\,cossec(\alpha)y - 8\,cotg(\alpha)x = 0 \end{cases}$$

onde α é um ângulo em radianos diferente de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). O lugar geométrico descrito pelos pontos P, conforme se varia o ângulo α, é um segmento de:

a) reta horizontal.

b) reta vertical.

c) reta inclinada.

d) elipse.

e) parábola.

Comentários

Analisando o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{sen\alpha} - \dfrac{6\cos\alpha}{sen\alpha} y = 4\,sen(\alpha) \\ \dfrac{12y}{sen\alpha} - \dfrac{8\cos\alpha}{sen\alpha} x = 0 \end{cases}$$

Como $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que $sen\alpha \neq 0$ e $\cos\alpha \neq \pm 1$.

Da segunda equação:

$$3y - 2\cos\alpha\, x = 0$$

$$y = \frac{2}{3}\cos\alpha\, x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3y}{2x} \quad (I)$$

Da primeira equação:

$$4x - 6\cos\alpha\, y = 4sen^2\alpha = 4(1 - \cos^2\alpha)$$

Usando I:

$$4x - 6\left(\frac{3y}{2x}\right)y = 4\left(1 - \frac{9y^2}{4x^2}\right)$$

$$\frac{4x^2 - 9y^2}{x} = \frac{4x^2 - 9y^2}{x^2}$$

Assim, podemos ter:

$$4x^2 - 9y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}x$$

Não convém, pois isso implica $\cos\alpha = \pm 1$.

Para $4x^2 - 9y^2 \neq 0$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$x = 1$$

Para esse valor:

$$y = \frac{2}{3}\cos\alpha$$

$$-1 < \cos\alpha < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < y < \frac{2}{3}$$

Portanto, temos um segmento de reta vertical $x = 1$ como lugar geométrico, para $-\frac{2}{3} < y < \frac{2}{3}$.

Gabarito: A

---

11. (IME/2023)

Um aluno distraído desmontou um relógio. Ao remontá-lo, trocou a posição dos ponteiros das horas e dos minutos, de modo que o ponteiro das horas passou a girar com a velocidade do ponteiro dos minutos, e vice-versa. Sabendo que o relógio foi acertado para as 4 horas, o intervalo que contém o horário t que marcará a hora certa novamente pela primeira vez é

a) $4h30min \leq t < 5h$

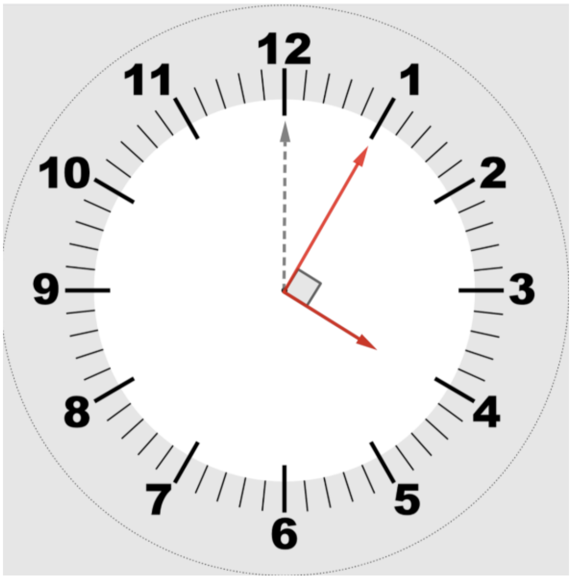
b) $5h \leq t < 5h30min$

c) $5h30min \leq t < 6h$

d) $6h \leq t < 6h30min$

e) $6h30min \leq t < 7h10min$

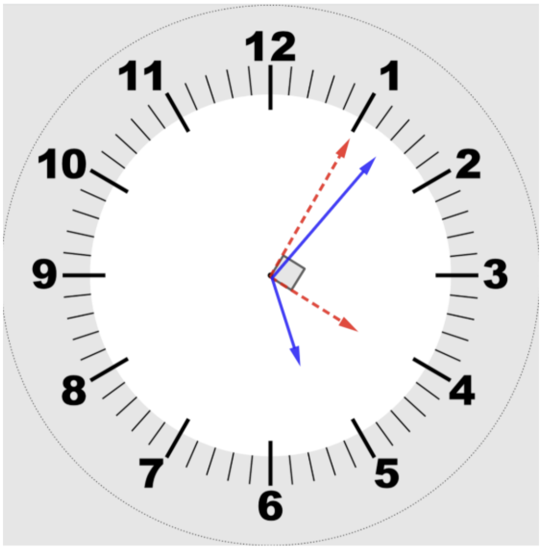
Comentários



Em um relógio, quando completamos 1 hora, o ponteiro das horas gira 30° e o ponteiro dos minutos gira 360°.

A situação inicial é o ponteiro dos minutos apontando no 12 (em pontilhado na figura) e o ponteiro das horas apontando no 4. Como os ponteiros trocaram de velocidades, temos que ao completar 1 hora, o ponteiro dos minutos percorrerá 30° e o das horas percorrerá uma volta completa, voltando no número 4, conforme indicado na figura pelas flechas vermelhas.

O horário correto será de acordo com a seguinte figura:



Nesse momento, a hora correta já estará por volta das 5 horas. O ponteiro dos minutos girará de 1 ao 2, e o das horas passará o 5. Nesse momento, teremos as horas corretas conforme as flechas em azul na figura.

Logo:

$$5h5min < t < 5h10min$$

Gabarito: B

---

12. (IME/2023)

Um triângulo ABC possui incentro I e ex-incentro G relativo ao lado $\overline{BC}$. Se $B\hat{I}C + A\hat{G}C = 155°$, então o ângulo $A\hat{C}B$ é

a) $30°$

b) $45°$

c) $50°$

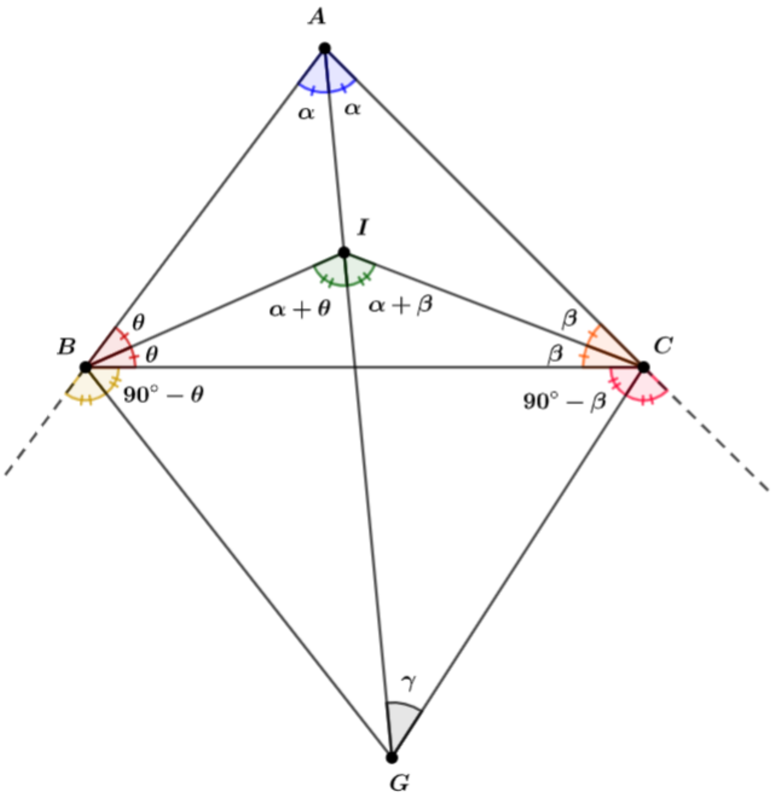
d) $60°$

e) $90°$

Comentários

Incentro é o encontro das bissetrizes internas e ex-incentro é o encontro de uma bissetriz interna e duas bissetrizes externas.

Desenhando a figura e completando os ângulos internos:



Do triângulo ABC:

$$2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180°$$

$$\therefore \alpha + \beta + \theta = 90° \ \ (I)$$

Da relação dada:

$$B\hat{I}C + A\hat{G}C = 155°$$

$$2\alpha + \beta + \theta + \gamma = 155°$$

Usando I:

$$\alpha + 90° + \gamma = 155°$$

$$\therefore \alpha + \gamma = 65° \ \ (II)$$

Do triângulo IGC:

$$\alpha + \beta + \beta + 90° - \beta + \gamma = 180°$$

$$\alpha + \gamma + \beta = 90°$$

Usando II:

$$\therefore \beta = 25°$$

Portanto:

$$A\hat{C}B = 2\beta = 50°$$

Gabarito: C

13. (IME/2023)

Seja a equação

$$\frac{144^x + 324^x}{64^x + 729^x} = \frac{6}{7}.$$

A soma dos módulos das soluções reais desta equação é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 8

e) 9

Comentários

$$\frac{144^x + 324^x}{64^x + 729^x} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{2^{4x} \cdot 3^{2x} + 2^{2x} \cdot 3^{4x}}{2^{6x} + 3^{6x}} = \frac{6}{7}$$

Dividindo o lado esquerdo por 3^{6x}:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{6x} + 1} = \frac{6}{7}$$

Para $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} > 0$:

$$\frac{y^2 + y}{y^3 + 1} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{y(y+1)}{(y+1)(y^2 - y + 1)} = \frac{6}{7}$$

$$y + 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{y^2 - y + 1} = \frac{6}{7}$$

$$6y^2 - 13y + 6 = 0$$

$$y = \frac{3}{2} \; ou \; y = \frac{2}{3}$$

Para cada solução:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \therefore x = -\frac{1}{2}$$

A soma dos módulos é:

$$S = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1$$

Gabarito: A

---

14. (IME/2023)

Se a equação $2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2 = 0$ representa no plano real duas retas concorrentes, então o valor positivo do número real c é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Comentários

Como a equação representa duas retas concorrentes, podemos escrever a seguinte identidade:

$$(x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \equiv 2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2$$

$$a_2x^2 + (b_2 + a_2b_1)xy + (b_1b_2)y^2 + (c_2 + a_2c_1)x + (b_1c_2 + b_2c_1)y + c_1c_2$$

$$\equiv 2x^2 + cxy + 6y^2 - 3x - 4y - 2$$

Comparando os coeficientes:

$$a_2 = 2$$

$$b_2 + a_2b_1 = c \Rightarrow b_2 + 2b_1 = c \ \ (I)$$

$$b_1b_2 = 6 \ \ (II)$$

$$c_2 + a_2c_1 = -3 \Rightarrow c_2 + 2c_1 = -3 \ \ (III)$$

$$b_1c_2 + b_2c_1 = -4 \ \ (IV)$$

$$c_1c_2 = -2 \ \ (V)$$

De III e V, encontramos $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$.

Usando em IV:

$$b_1 - 2b_2 = -4$$

Como $b_1b_2 = 6$, encontramos:

$$b_1 = 2 \text{ e } b_2 = 3$$

Portanto:

$$c = b_2 + 2b_1 = 3 + 2(2) = 7$$

Gabarito: B

---

15. (IME/2023)

Um número natural é palíndromo quando é o mesmo lido da esquerda para a direita e vice-versa. Seja n um número natural palíndromo tal que $1000 \leq n \leq 9999$. Se n é um cubo perfeito, então a soma dos algarismos de n é

a) 8

b) 10

c) 12

d) 14

e) 16

Comentários

Como n é palíndromo de 4 algarismos, ele é da forma:

$$n = abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$$

$$n = 11(91a + 10b)$$

Assim, temos que n é divisível por 11.

Fazendo $n = k^3, k \in \mathbb{N}$, temos:

$$1000 \leq k^3 \leq 9999$$

$$10^3 \leq k^3 \leq 21^3$$

$$\therefore 10 \leq k \leq 21$$

Se 11 divide n, então 11 também divide k. Como $10 \leq k \leq 21$, devemos ter $k = 11$. Logo:

$$n = 11^3 = 1331$$

$$soma = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Gabarito: A