Estratégia Militares

# Correção

## Prova EN 2023

Prof. Victor So

1. **(EN/2022)**

Seja $A$ o conjunto de valores reais para o qual $f(x) = log_{10}\left[log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right]$ esteja definida. Seja $B$ o conjunto dos valores reais de $k$ de forma que a equação $x^2 - 2x + log_{10}(k-2) = 0$ admita raízes reais distintas. Desse modo, assinale a opção que apresenta o conjunto $A \cap B$.

a) $\emptyset$

b) $(2; 12)$

c) $[0; 12]$

d) $(1; 2]$

e) $(0; 1)$

**Comentários**

Analisando o conjunto A:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$$

Da segunda inequação temos $\Delta = -3 < 0$, logo:

$$x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - x + 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$x^2 - x < 0$$

$$x(x-1) < 0 \therefore x \in (0; 1)$$

$$\therefore A = (0; 1)$$

Analisando o conjunto B:

$$k - 2 > 0 \therefore k > 2$$

$$x^2 - 2x + log_{10}(k-2) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\log(k-2) > 0$$

$$\log(k-2) < 1 \Rightarrow k - 2 < 10 \therefore k < 12$$

$$\therefore B = (2; 12)$$

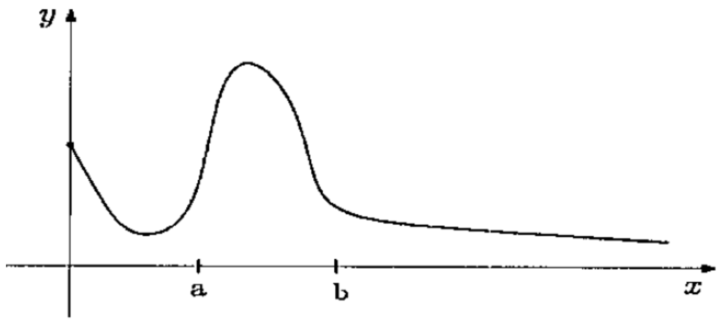
$$\therefore A \cap B = \emptyset$$

**Gabarito: A**

---

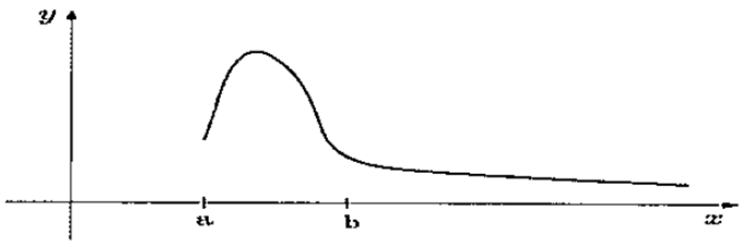
2. **(EN/2022)**

Seja $f$ a função definida por $f(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$. Considere o esboço do gráfico de $g$ representado ela figura abaixo.

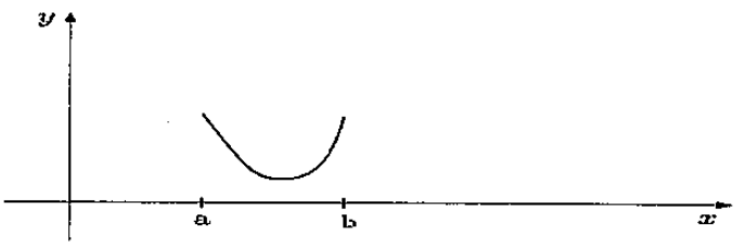



Assinale a opção que apresenta o esboço da parte positiva do gráfico de $g(t-a)f(t-a) - g(t-a)f(t-b)$.

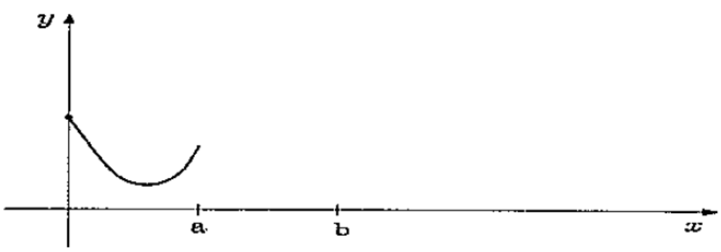
a)



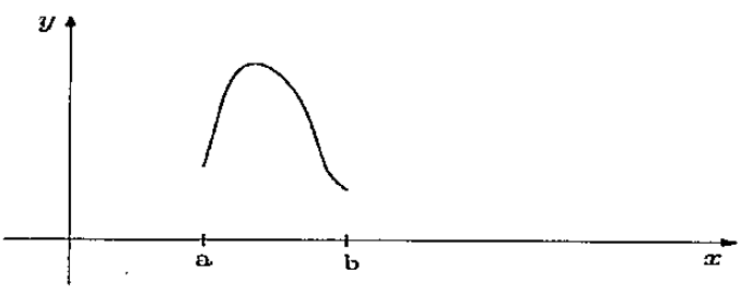

b)




c)

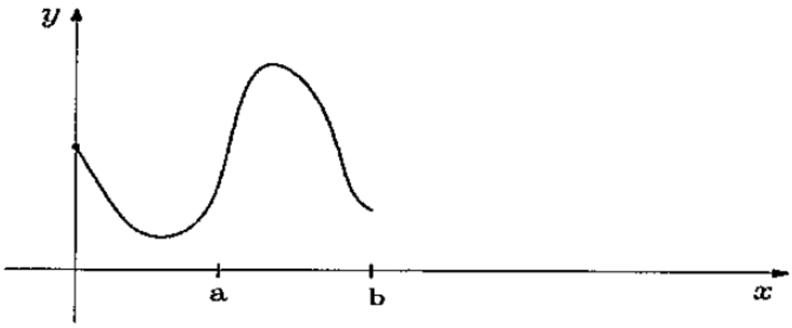



d)




CORREÇÃO

e)




**Comentários**

Temos:

$$f(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$$

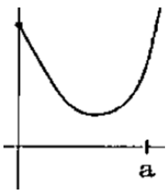
$$g(t-a)f(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ g(t-a), & t\ge a\end{cases}$$

$$g(t-a)f(t-b)=\begin{cases}0, & 0\le t<b\\ g(t-a), & t\ge b\end{cases}$$

Fazendo a análise dos intervalos, obtemos:

$$g(t-a)f(t-a)-g(t-a)f(t-b)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ g(t-a), & a\le t<b\\ 0, & t\ge b\end{cases}$$

Assim, temos que a função corresponde a $g(t-a)$, que é o deslocamento horizontal de $a$ unidades para a direita da função $g(t)$. Portanto, no intervalo de $[a,b]$, devemos encontrar o seguinte gráfico:




Esse gráfico corresponde à alternativa B.

**Gabarito: B**

**3. (EN/2022)**

Para que valores reais de $x$, a sequência geométrica $\left(\frac{2x}{3x+1}; \frac{2x}{(3x+1)^2}; \frac{2x}{(3x+1)^3}; \dots\right)$ possui o limite da soma de seus termos iguais a $\frac{2}{3}$?

a) $\forall x \in R$

b) $R - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $(0; 1)$

d) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$

e) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$

**Comentários**

Devemos ter uma soma de PG infinita:

$$a_1 = \frac{2x}{3x+1} \ e\ q = \frac{1}{3x+1}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2x}{3x+1}}{1 - \left(\frac{1}{3x+1}\right)} = \frac{2x}{3x+1} \cdot \frac{3x+1}{3x} = \frac{2}{3}, x \neq 0$$

Para a PG ser uma soma infinita, devemos ter $0 < |q| < 1$, logo:

$$0 < \frac{1}{|3x+1|} < 1$$

$$\frac{1}{|3x+1|} < 1 \Rightarrow \frac{1 - |3x+1|}{|3x+1|} < 0$$

Como o denominador sempre é positivo, então:

$$1 - |3x+1| < 0$$

$$|3x+1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 > 1 \\ 3x+1 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Com isso, devemos ter:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$$

**Gabarito: D**

---

**4. (EN/2022)**

Seja $f$ uma função definida no conjunto dos números reais. Supondo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$, é correto afirmar que o valor do $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1}$ é igual a:

a) $-2L$

b) $-L$

c) $0$

d) $L$

e) $2L$

**Comentários**

Manipulando o limite pedido:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1}\lim_{x\to 1}(x+1)$$

Fazendo $x^2-1=y$, temos que $x\to 1$ implica $y\to 0$, logo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1}\lim_{x\to 1}(x+1)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\lim_{x\to 1}(x+1)=2L$$

**Gabarito: E**

---

**5. (EN/2022)**

Um ângulo agudo de um triângulo retângulo ABC, reto em C, é igual a $\alpha$. Sabe-se que a hipotenusa desse triângulo e os prolongamentos de CA e CB são tangentes a uma circunferência de raio $R$. Desse modo, o comprimento da hipotenusa é igual a:

a) $\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

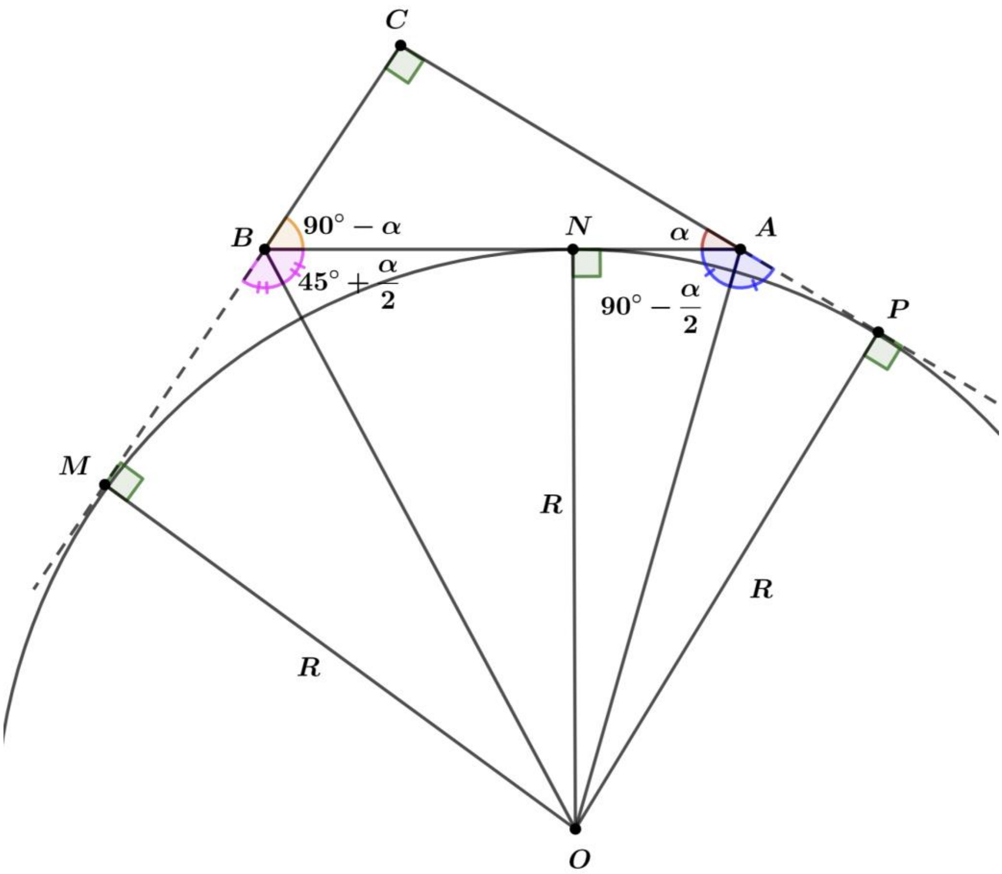
b) $\frac{R\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) $\frac{R\sqrt{2}}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

d) $\frac{R\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

e) $\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

**Comentários**




Temos uma circunferência ex-inscrita ao lado AB do triângulo. Assim, O é o ponto de encontro das bissetrizes externas em A e B do triângulo ABC. Note que:

$$N\hat{A}P = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$M\hat{B}N = \frac{1}{2}\left(180° - (90° - \alpha)\right) = 45° + \frac{\alpha}{2}$$

Aplicando a razão tangente nos triângulos OBN e AON:

$$tg\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{BN} \Rightarrow BN = \frac{R}{tg\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{AN} \Rightarrow AN = \frac{R}{tg\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = R\,tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

A hipotenusa é dada por:

$$AB = BN + AN = \frac{R\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} + R\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$AB = \frac{R\left(\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sen\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{sen\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$AB = \frac{R\left(\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)}{sen\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R\cos(45°)}{\cos\left(90° - \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\therefore AB = \frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

**Gabarito: A**

---

**6. (EN/2022)**

Considere dois navios e um submarino da Marinha do Brasil em um exercício de Operações Navais. Os navios serão chamados de P31 e P32 e o submarino de S40. Supondo que, às 12h, S40 verifica que, em seu sonar, P31 está 100km a oeste de P32 e que P31 está navegando para o sul a 35km/h e P32 está indo para norte a 25km/h. O comandante do S40 determina ao operador de sonar que verifique e lhe dê a resposta de quão rápido estará variando a distância entre P31 e P32, às 16h. Assinale a opção que apresenta a resposta correta do operador de sonar ao comandante do S40, aproximadamente.

a) 52,3 km/h

b) 55,4 km/h

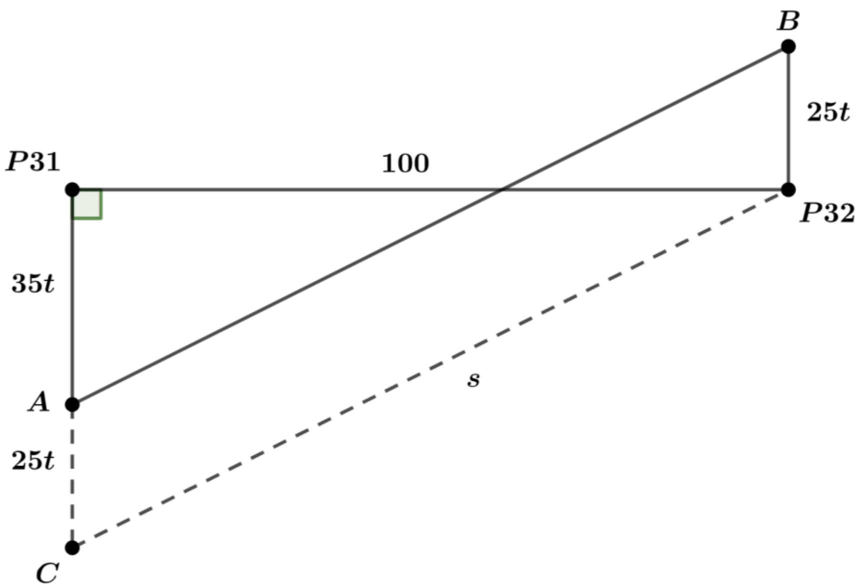
c) 56,8 km/h

d) 59,3 km/h

e) 59,9 km/h

**Comentários**

Temos o seguinte diagrama:




Após t horas, P31 estará na posição A e P32 na posição B. Note que $AB = CP32 = s$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $P31CP32$:

$$s^2 = 100^2 + (60t)^2$$

$$s^2 = 100(100 + 36t^2)$$

$$s = 10\sqrt{100 + 36t^2}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{10}{2}\frac{72t}{\sqrt{100 + 36t^2}} = \frac{360t}{\sqrt{100 + 36t^2}}$$

Das 12h até 16h passaram-se $t = 4h$, logo:

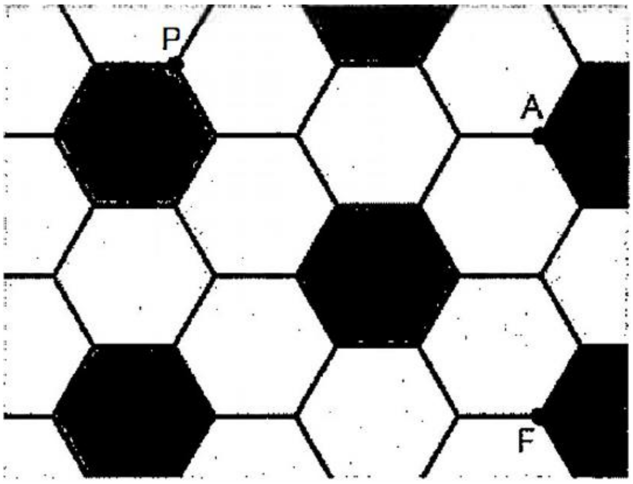
$$\frac{ds}{dt} = \frac{360 \cdot 4}{\sqrt{100 + 36(4)^2}} = \frac{360 \cdot 4}{\sqrt{676}} = \frac{1440}{26} \cong 55{,}4$$

**Gabarito: B**

---

**7. (EN/2022)**

Em um piso formado por ladrilhos nos formatos de hexágonos regulares congruentes de lados iguais a 2cm, uma formiga se encontra no ponto F, uma aranha no ponto A e uma migalha de pão em P, conforme figura abaixo.




A formiga e a aranha se deslocam em direção a P no mesmo instante e com velocidades constantes iguais. A formiga somente se desloca através dos segmentos determinados pelos lados dos hexágonos. Quando a aranha chega em P, qual é a menor distância possível, em cm, dela até a formiga?

a) $2\sqrt{58 - 11\sqrt{3}}$

b) $2\sqrt{29 - 3\sqrt{21}}$

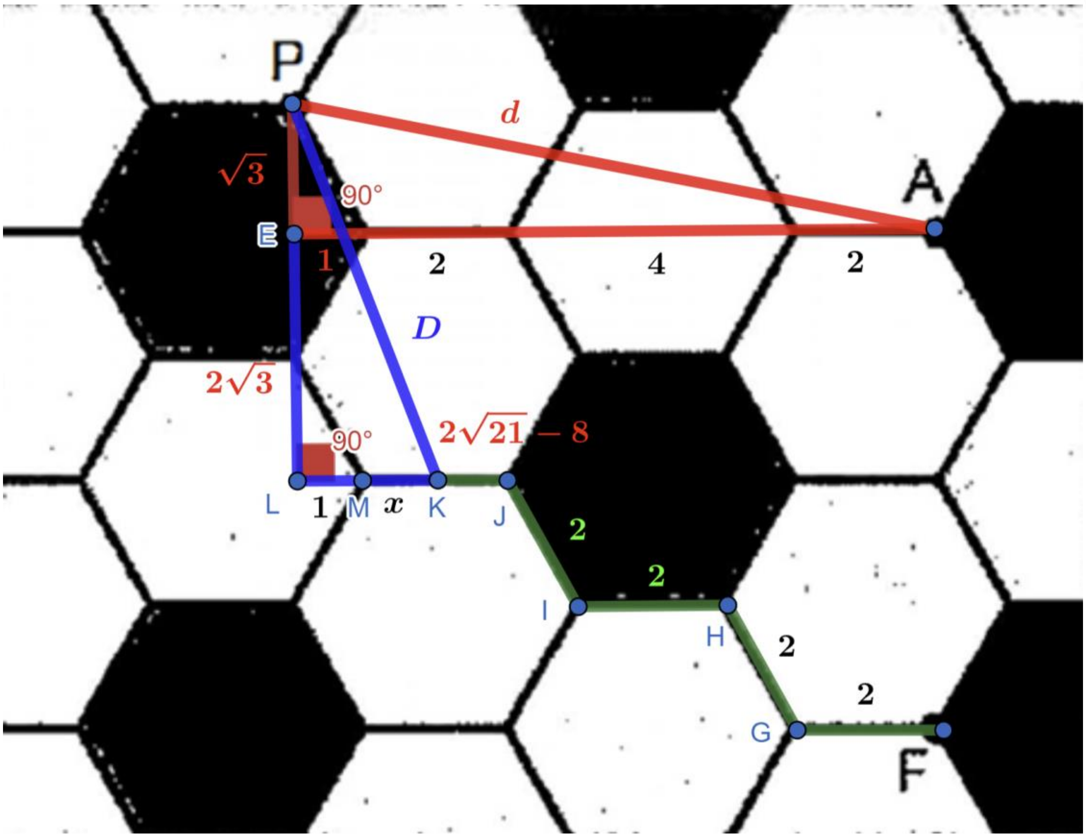
c) $2\sqrt{58 - 11\sqrt{21}}$

d) $2\sqrt{37 - 11\sqrt{3}}$

e) $2\sqrt{37 - 4\sqrt{21}}$

**Comentários**

Temos da figura:




No momento que a aranha chegar na posição P, ela terá percorrido uma distância d que será a mesma distância percorrida pela formiga. Calculando d:

$$\Delta APE: d^2 = \sqrt{3}^2 + (1+2+4+2)^2$$

$$d = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \cong 2 \cdot 4{,}58$$

Como a formiga anda apenas nas bordas dos hexágonos, temos que ela caminhará 4 bordas mais 0,58 de outra borda. O caminho descrito corresponde ao caminho verde da figura. Assim, temos que:

$$KJ = 2\sqrt{21} - 8$$

$$MK = 2 - \left(2\sqrt{21} - 8\right) = 10 - 2\sqrt{21}$$

$$LK = 1 + MK = 11 - 2\sqrt{21}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo LPK:

$$D^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(11 - 2\sqrt{21}\right)^2$$

$$D^2 = 232 - 44\sqrt{21}$$

$$D^2 = 4\left(58 - 11\sqrt{21}\right)$$

$$D = 2\sqrt{58 - 11\sqrt{21}}$$

**Gabarito: C**

---

8. **(EN/2022)**

Suponha que duas aeronaves da Marinha do Brasil, F1 e F2, estejam percorrendo as trajetórias dadas pelas retas $r: X = (-1,2,0) + \beta(1,3,1)$ e $S: \begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$, respectivamente. É correto afirmar que a distância entre essas retas é igual a:

a) $\frac{7\sqrt{7}}{12}$

b) $\frac{6}{\sqrt{23}}$

c) $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

d) $\frac{12}{\sqrt{46}}$

e) $\frac{4\sqrt{21}}{8}$

**Comentários**

Encontrando os vetores diretores e os pontos das retas:

$$r: X = (-1,2,0) + \beta(1,3,1) \Rightarrow \begin{cases} P = (-1,2,0) \\ \vec{v} = (1,3,1) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x = \frac{2}{3}z + 1 = 1 + \frac{2}{3}\alpha \\ y = z + 2 = 2 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow X = (1,2,0) + \alpha\left(\frac{2}{3}, 1,1\right) \Rightarrow \begin{cases} Q = (1,2,0) \\ \vec{w} = \left(\frac{2}{3}, 1,1\right) \end{cases}$$

A distância é dada por:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{w}\ x\ \vec{v})\right|}{|\vec{w}\ x\ \vec{v}|}$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,2,0) - (-1,2,0) = (2,0,0)$$

$$\vec{w}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2i + \frac{1}{3}j + k = \left(-2, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$d = \frac{\left|(2,0,0) \cdot \left(-2, \frac{1}{3}, 1\right)\right|}{\left|\left(-2, \frac{1}{3}, 1\right)\right|} = \frac{|4|}{\sqrt{4 + \frac{1}{9} + 1}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{46}}{3}} = \frac{12}{\sqrt{46}}$$

**Gabarito: D**

---

**9. (EN/2022)**

Seja $ABC$ um triângulo de lados $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{CA} = 6$. Sejam D, E e F os pontos onde o círculo inscrito a $ABC$ tangencia os lados BC, CA e AB, respectivamente, e suponha, ainda, que o círculo ex-inscrito a BC tangencia tal lado em M e os prolongamentos de AC e AB respectivamente em N e P. Desse modo, assinale opção que apresenta o comprimento de $\overline{FD}$.

a) 2

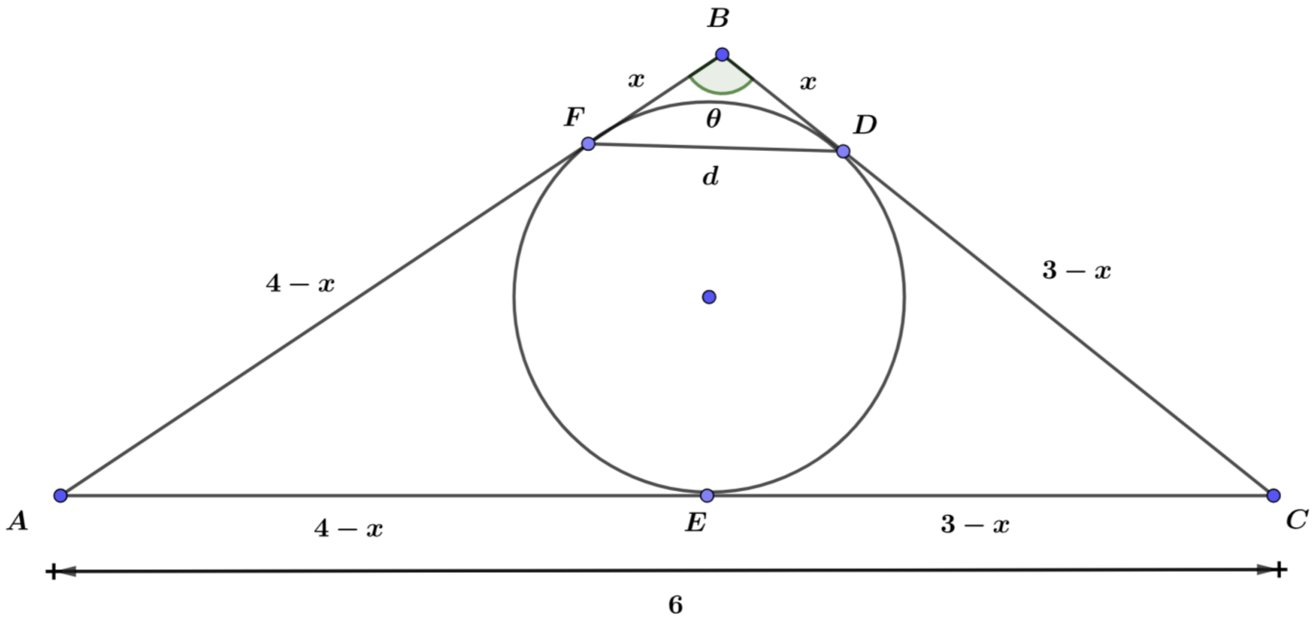
b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

**Comentários**




Como a circunferência é inscrita e F, D e E são pontos de tangência, temos:

$$BF = BD; AF = AE; CD = CE$$

Da figura:

$$AC = 4 - x + 3 - x = 6 \Rightarrow 2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta ABC$:

$$6^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{11}{24}$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta BFD$:

$$d^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\theta$$

$$d^2 = 2x^2(1 - \cos\theta) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 + \frac{11}{24}\right)$$

$$d = \sqrt{\frac{35}{48}}$$

**Gabarito: Sem gabarito**

---

**10. (EN/2022)**

Considere a seguinte definição: "Diz-se que uma matriz $A$, de ordem $n \, x \, n$ é estritamente diagonal dominante quando $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ é válido para cada $i = 1,2, \dots, n$." Suponha que $A$ e $B$ sejam matrizes $n \, x \, n$ estritamente diagonais dominantes. Com base nessa definição assinale a opção correta.

a) É falso que $A - B$ é estritamente diagonal dominante.

b) É falso que $-A$ é estritamente diagonal dominante.

c) É verdadeiro que $A^T$ (transporta de $A$) é estritamente diagonal dominante.

d) É verdadeiro que $A + B$ é estritamente diagonal dominante.

e) É verdadeiro que $A^2$ é estritamente diagonal dominante.

**Comentários**

Uma matriz é estritamente diagonal dominante quando o módulo de qualquer elemento da diagonal principal é maior que a soma dos módulos dos elementos da linha do elemento. Assim, vamos usar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Analisando as alternativas:

a) Falso.

$$A - B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$A - B$ é estritamente diagonal dominante, pois $|-7| > |1|$ e $|6| > |1|$.

b) Falso.

$$-A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

A matriz continua sendo EDD (estritamente diagonal dominante).

c) Falso.

$$A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Não é EDD, pois $|3| = |3|$.

d) Falso.

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Não é EDD, pois $|-1| < |5|$.

e) Falso.

Tomando $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, temos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 9 & 27 & 19 \\ 7 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

Não é EDD, pois $|5| < |1| + |6|$.

**Gabarito: Sem gabarito**

**11. (EN/2022)**

Sejam o número real $x$ e $i$ a unidade imaginária. O produto dos valores de $x$ que torna a igualdade $|7 - xi + 4i| = 8$ verdadeira é igual a:

a) -1

b) 0

c) 1

d) 15

e) 16

**Comentários**

Calculando as raízes:

$$|7 - xi + 4i| = 8$$

$$|7 + (4 - x)i|^2 = 8^2$$

$$7^2 + (4 - x)^2 = 8^2$$

$$(4 - x)^2 = 15$$

$$4 - x = \pm\sqrt{15}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{15}$$

O produto das raízes é:

$$P = \left(4 + \sqrt{15}\right)\left(4 - \sqrt{15}\right) = 16 - 15 = 1$$

**Gabarito: C**

**12. (EN/2022)**

Na última corrida de automóveis em um campeonato, Lewis precisa completar a prova, no mínimo, duas posições à frente de Max para ser declarado campeão. Nessa última corrida, com apenas dez participantes, Lewis larga em primeiro e Max na última posição. Considerando os resultados possíveis da corrida e que todos os pilotos completem a prova, qual a probabilidade de Lewis ser o campeão?

a) $\frac{1}{90}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{3}{8}$

**Comentários**

Vamos calcular a probabilidade usando:

$$p = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n_f}{n_p}$$

Analisando as possibilidades:

$$n_p = 10 \cdot 9 = 90$$

Lewis pode ocupar 10 posições e Max poderá ocupar qualquer uma das 9 posições restantes.

A condição estabelece que Lewis esteja pelo menos 2 posições a frente de Max. As possibilidades são:

L = 1ª posição ⇒ n(M) = 8, pois Max poderá ocupar a posição 3 em diante.

L = 2ª posição ⇒ n(M) = 7, pois Max poderá ocupar a posição 4 em diante.

⋮

L = 8ª posição ⇒ n(M) = 1, pois Max poderá ocupar apenas a posição 10.

Assim, temos:

$$n_f = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = \frac{(1+8)8}{2} = 4 \cdot 9 = 36$$

A probabilidade é:

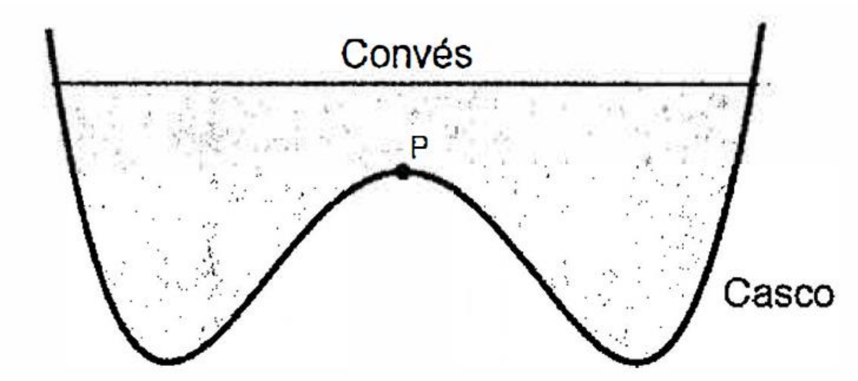
$$p = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

**Gabarito: D**

---

**13. (EN/2022)**

Um barco catamarã foi construído de forma que a parte central do casco possuo seção transversal modelada pela função $f$, definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 1{,}2x^2$, com $x$ em metros, conforme apresentado na figura abaixo.




A linha do convés encontra-se a 0,5 m do ponto alto P (distância vertical). Considerando apenas a figura plana, a distância, em metros, do convés ao ponto mais baixo dó casco é igual a:

a) 1,08

b) 1,34

c) 1,58

d) 1,84

e) 2,08

**Comentários**

Analisando os pontos de máximo e mínimo da função:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 1{,}2x^2$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2{,}4x = 0$$

$$4x\left(\frac{x^2}{3} - 0{,}6\right) = 0$$

Raízes:

$$x = 0$$

$$\frac{x^2}{3} - 0{,}6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1{,}8 \therefore x = \pm\sqrt{1{,}8}$$

Analisando se são pontos de máximo ou mínimo:

$$f''(x) = 4x^2 - 2{,}4$$

$$f''(0) = -2{,}4 < 0 \Rightarrow máximo$$

$$f''(\sqrt{1{,}8}) = 4(\sqrt{1{,}8})^2 - 2{,}4 = 4{,}8 > 0 \Rightarrow mínimo$$

$$f''(-\sqrt{1{,}8}) = 4(-\sqrt{1{,}8})^2 - 2{,}4 = 4{,}8 > 0 \Rightarrow mínimo$$

Para $x = \sqrt{1{,}8}$:

$$f(\sqrt{1{,}8}) = \frac{1}{3}\sqrt{1{,}8}^4 - 1{,}2\sqrt{1{,}8}^2 = -1{,}08$$

A distância do convés até o ponto mais baixo do casco é:

$$\Delta y = 0{,}5 - (-1{,}08) = 1{,}58$$

**Gabarito: C**

---

**14. (EN/2022)**

Sejam $f$ e $g$ funções definidas nos reais, tais que $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 40$ e $fog(x) = x$. Dessa forma $g(x)$ é igual a:

a) $1 + \sqrt[3]{x - 2}$

b) $2 - \sqrt[3]{\frac{x}{4} + 2}$

c) $2 - \sqrt[3]{\frac{x}{4} + 4}$

d) $2 + \sqrt[3]{x + 2}$

e) $2 + \sqrt[3]{\frac{x}{4} + 2}$

**Comentários**

Como $fog(x) = f\big(g(x)\big) = x$, temos $g(x) = f^{-1}(x)$. Fatorando $f$:

$$f(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 12x - 10)$$

$$f(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2)$$

$$f(x) = 4((x-2)^3 - 2)$$

Encontrando a inversa:

$$y = f(x)$$

$$y = 4((x-2)^3 - 2)$$

$$\frac{y}{4} + 2 = (x-2)^3$$

$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{\frac{y}{4} + 2}$$

$$\therefore g(x) = 2 + \sqrt[3]{\frac{x}{4} + 2}$$

**Gabarito: E**

---

**15. (EN/2022)**

O escudo atual campeão de futebol na série de acesso, o Botafogo, possui como principal símbolo uma estrela (figura1).

Figura 1

Considere que a estrela foi formada a partir de uma circunferência unitária dividida em cinco partes iguais, determinando os pontos A, C, E, G e 1 (figura 2). As cordas AE, AG, CG, CI e EI determinam um pentagrama, isto é, formam a estrela. Assinale a alternativa que representa a área da estrela, em unidades de área, ou seja, do polígono ABCDEFGHIJ.

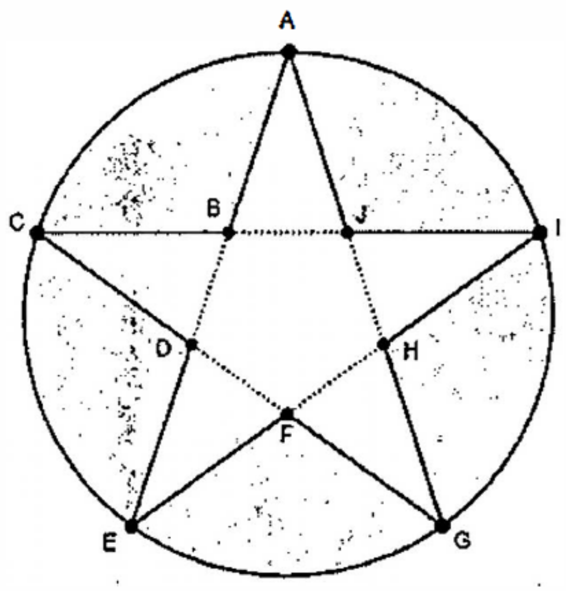


Figura 2

a) $5.tg(36°).\cos(72°)$

b) $tg(72°).\cos(36°)$

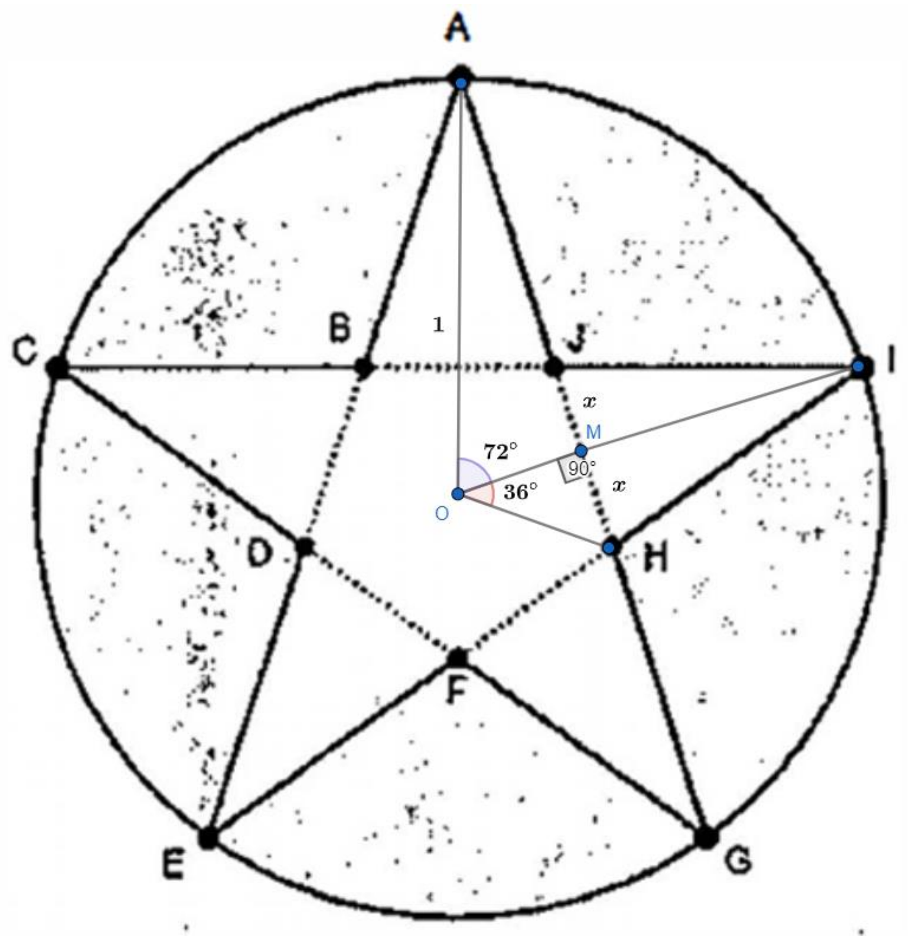
c) $5.tg(36°).\text{sen}(72°)$

d) $5.sen(36°).\cos(72°)$

e) $tg(72°).\text{sen}(72°)$

**Comentários**

Da figura, temos:




O ângulo central é:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

Como o pentágono é regular, temos que:

$$MOH = \frac{72°}{2} = 36°$$

Do triângulo OMA, temos:

$$OM = 1 \cdot \cos 72°$$

Do triângulo OMH:

$$tg(36°) = \frac{x}{OM} \Rightarrow x = tg(36°)\cos(72°)$$

A área é:

$$A = 5[IJH] + [BJHFD]$$

$$A = 5\left(\frac{1}{2}2x(1 - \cos 72°)\right) + 5\left(\frac{1}{2}(2x)\cos 72°\right)$$

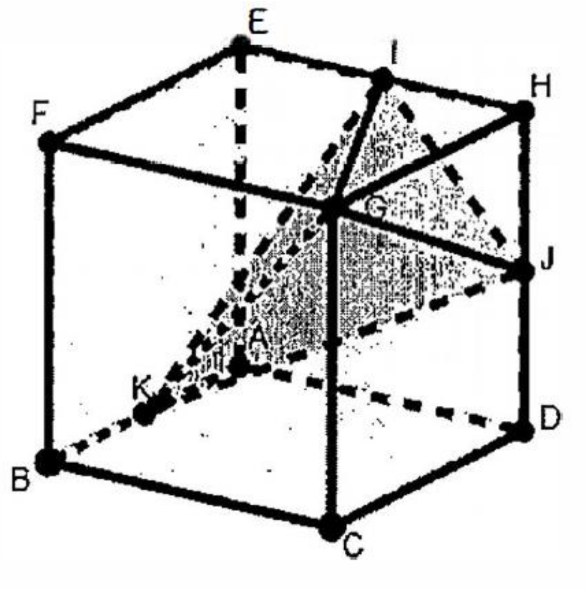
$$A = 5x = 5tg(36°)\cos(72°)$$

**Gabarito: A**

---

**16. (EN/2022)**

Seja o cubo ABCDEFG de aresta 2 cm e I, J e K pontos médios das arestas EH, DH e AB, respectivamente.




O volume da pirâmide GIJK, em $cm^3$, é igual a:

a) $\frac{7}{6}$

b) $\frac{3}{2}$

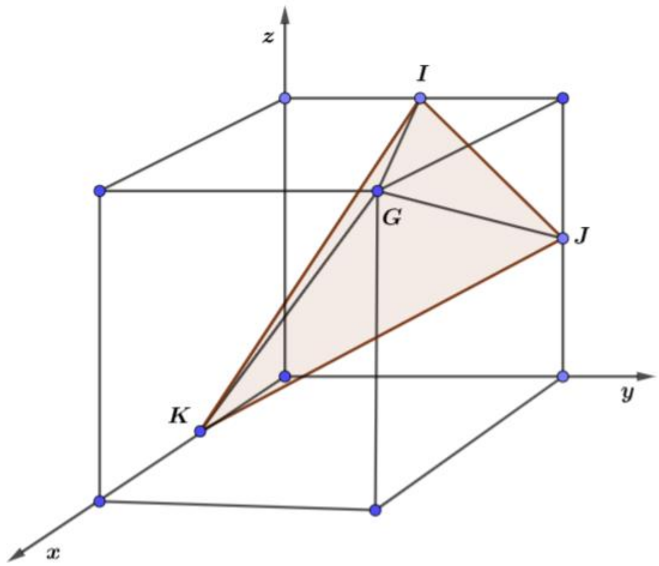
c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{11}{8}$

e) $\frac{13}{12}$

**Comentários**

Inserindo o cubo no R3:



As coordenadas dos pontos são:

$$K = (1, 0, 0)$$
$$J = (0, 2, 1)$$
$$G = (2, 2, 2)$$
$$I = (0, 1, 2)$$
$$\vec{u} = KJ = J - K = (-1, 2, 1)$$
$$\vec{v} = KG = G - K = (1, 2, 2)$$
$$\vec{w} = KI = I - K = (-1, 1, 2)$$

O volume é dado por:

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-7| = \frac{7}{6}$$

**Gabarito: A**

---

**17. (EN/2022)**

Seja $F$ uma função real definida por $F(t) = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b e^{-tx} g(x)dx$, em que $g(x) = xe^{-ax}$ com $a$ um número real. Assinale a opção que apresenta todos os valores de $t$ para os quais $F(t)$ exista.

a) $t > -a$

b) $t < a$

c) $t < -2a$

d) $t > a$

e) $t > 2a$

**Comentários**

Calculando a integral:

$$I = \int_0^b e^{-tx} x e^{-ax} dx = \int_0^b x e^{-(t+a)x} dx$$

Usando integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{-(t+a)x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{-(t+a)x}}{-(t+a)}$$
$$\int_0^b x e^{-(t+a)x} dx = \left[\frac{x e^{-(t+a)x}}{-(t+a)}\right]_0^b - \int_0^b \frac{e^{-(t+a)x}}{-(t+a)} dx$$

$$= \left[\frac{xe^{-(t+a)x}}{-(t+a)}\right]_0^b - \left[\frac{e^{-(t+a)x}}{(t+a)^2}\right]_0^b = -\frac{be^{-(t+a)b}}{(t+a)} - \frac{e^{-(t+a)b}}{(t+a)^2} + \frac{e^0}{(t+a)^2}$$

$$\therefore \int_0^b xe^{-(t+a)x}dx = -\frac{b}{(t+a)e^{(t+a)b}} - \frac{1}{(t+a)^2e^{(t+a)b}} + \frac{1}{(t+a)^2}$$

A função é:

$$F(t) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tx}g(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{(t+a)e^{(t+a)b}} - \frac{1}{(t+a)^2e^{(t+a)b}} + \frac{1}{(t+a)^2}\right]$$

Para que ela exista, devemos ter:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{(t+a)e^{(t+a)b}}\right] = 0 \ e \ \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{(t+a)^2e^{(t+a)b}}\right]$$

Isso ocorre quando $t + a > 0$, ou seja, $t > -a$.

**Gabarito: A**

---

**18. (EN/2022)**

Sejam as funções $f$ e $g$ tais que $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 2x$, $g'(x) = \frac{2}{x+3}$ e $g(1) = 0$. O valor de $(fog)'(1)$ é igual a:

a) $\ln(16)$

b) $5\ln(4)$

c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

**Comentários**

Temos a regra da cadeia:

$$(fog)'(1) = f'\big(g(1)\big)g'(1)$$

$$f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 2$$

$$f'\big(g(1)\big) = f'(0) = 2$$

$$g'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(fog)'(1) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

**Gabarito: D**

---

**19. (EN/2022)**

Na observação astronômica, o telescópio refletor, com espelho parabólico no fundo de um tubo (figura 1), é bastante utilizado. Os raios provenientes de corpos celestes formam um feixe praticamente paralelo, refletem no espelho parabólico e formam a imagem no foco F da parábola.

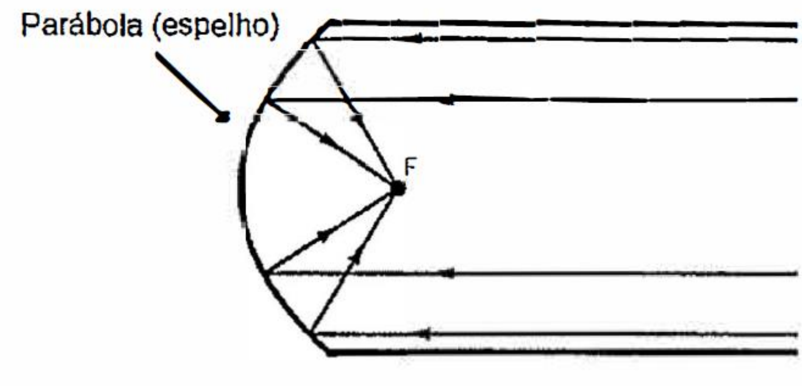



Figura 1

Esse modelo de telescópio apresenta um problema: o observador precisa estar no foco da parábola para ver a imagem. Em 1672, o astrônomo Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico (espelho E) para resolver o problema. Essa hipérbole do espelho terá F como um dos seus focos. Os raios que iriam formar a imagem em F são refletidos no espelho E e formam a imagem no ponto F1 fora do tubo do telescópio (figura 2).

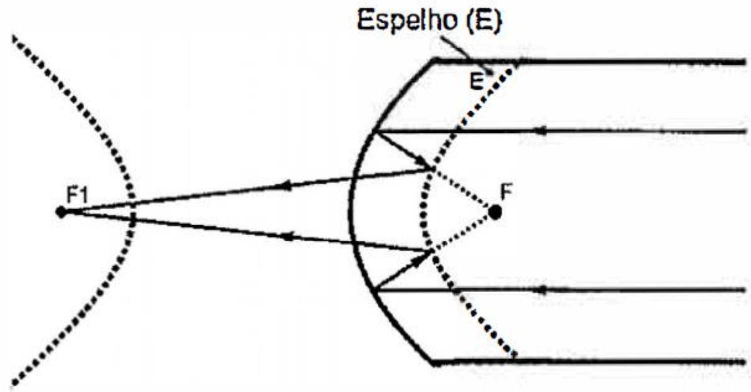



Figura 2

Considerando o modelo plano, como sugerem as figuras, tomamos a parábola com equação $y^2 = 16x$ e foco $F$, a hipérbole (do espelho $E$ e um dos focos $F$) com excentricidade $\frac{3}{2}$, focos na horizontal e uma de suas assíntotas de equação $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}$; podemos afirmar que a distância, em unidades de comprimento, entre $F$ e $F1$ é igual a:

a) $6\sqrt{5}$

b) 12

c) 10

d) $4\sqrt{5}$

e) $3\sqrt{5}$

**Comentários**

Da parábola, temos:

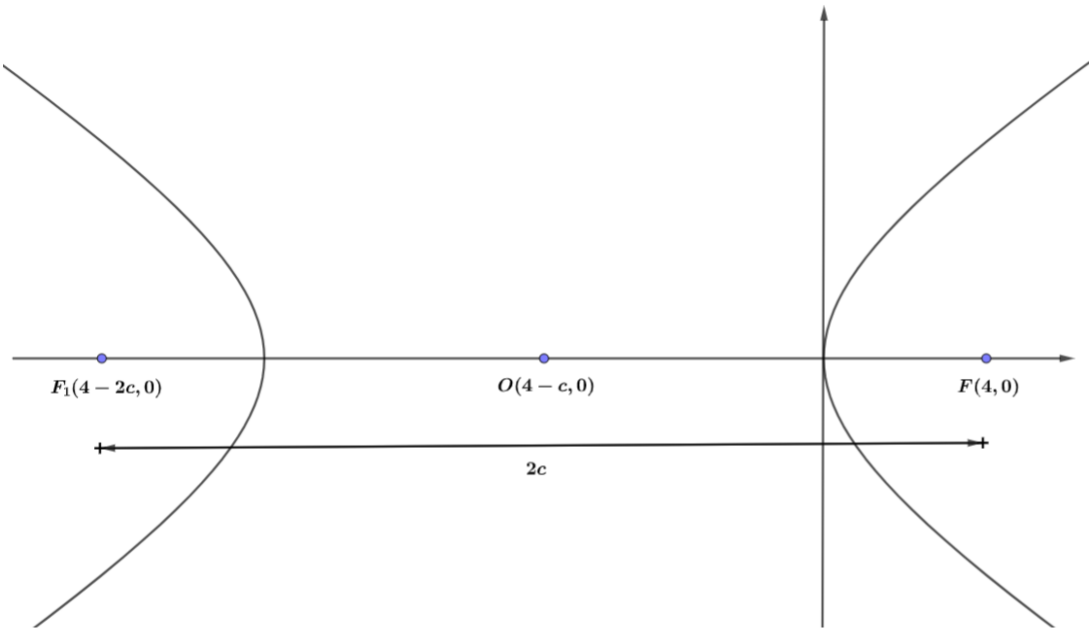
$$y^2 = 16x$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$
$$\therefore V = (0,0)\ e\ 2p = 16$$
$$p = 8$$

As coordenadas de F são dadas por:

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (4, 0)$$

Analisando a hipérbole:




O é o ponto médio de $F_1F$, a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{\left(x-(4-c)\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da excentricidade e relação fundamental:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}c \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9}c^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = c^2 - \frac{4c^2}{9} = \frac{5c^2}{9}$$

Logo:

$$\frac{9\left(x-(4-c)\right)^2}{4c^2} - \frac{9y^2}{5c^2} = 1$$

As assíntotas são dadas por:

$$\frac{9\left(x-(4-c)\right)^2}{4c^2} - \frac{9y^2}{5c^2} = 0$$
$$\left[\frac{3}{2c}\left(x-(4-c)\right) - \frac{3y}{\sqrt{5}c}\right]\left[\frac{3}{2c}\left(x-(4-c)\right) + \frac{3y}{\sqrt{5}c}\right] = 0$$

Como a assíntota dada possui coeficiente angular positivo, ela deve ser:

$$\frac{3}{2c}\left(x-(4-c)\right)-\frac{3y}{\sqrt{5}c}=0$$

$$y=\frac{\sqrt{5}x}{2}-\frac{(4-c)\sqrt{5}}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}\Rightarrow\frac{(c-4)\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\Rightarrow c=6$$

Portanto, $F_1F=2c=12$.

**Gabarito: B**

---

**20. (EN/2022)**

Seja $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ um número complexo, sendo $i$ a unidade imaginária.

Considere a soma $S=1+Z+Z^2+Z^3+\cdots+Z^{49}+Z^{50}$. Desse modo, assinale a opção que apresenta o intervalo $R$ ao qual a parte real de $S$ pertence. Dados: $\sqrt{2}=1{,}4$ ; $\sqrt{3}=1{,}7$ e $\sqrt{5}=2{,}2$.

a) $(-1;0)$

b) $(-3;-2)$

c) $(-2;-1)$

d) $(0;1)$

e) $(2;3)$

**Comentários**

A soma é:

$$S=\frac{Z^{51}-1}{Z-1}$$

$$Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z^{51}=cis\left(\frac{51\pi}{6}\right)=cis\left(\frac{3\pi}{6}\right)=cis\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

$$\Rightarrow S=\frac{i-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-1}=\frac{[-1+i]}{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}i\right]}\cdot\frac{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-\frac{1}{2}i\right]}{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-\frac{1}{2}i\right]}$$

$$S=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2-\sqrt{3}}$$

$$Re(S)=\frac{3-\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}=\frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cong\frac{4{,}7}{2}\cong 2{,}35$$

**Gabarito: E**

**21. (EN/2022)**

Uma perpendicular de comprimento $p$ é traçada do pé da altura de uma pirâmide regular $SABC$ até uma aresta lateral $(SC, SB\ ou\ SA)$. Assinale a opção que apresenta o volume da pirâmide $SABC$ se o ângulo entre suas faces é $2\alpha$.

a) $\frac{6}{5}p^2\frac{tg^2(\alpha)}{\sqrt{2-cotg^2(\alpha)}}$

b) $\frac{1}{12}p^2\frac{cot\,g^2(2\alpha)}{\sqrt{3-tg^2(\alpha)}}$

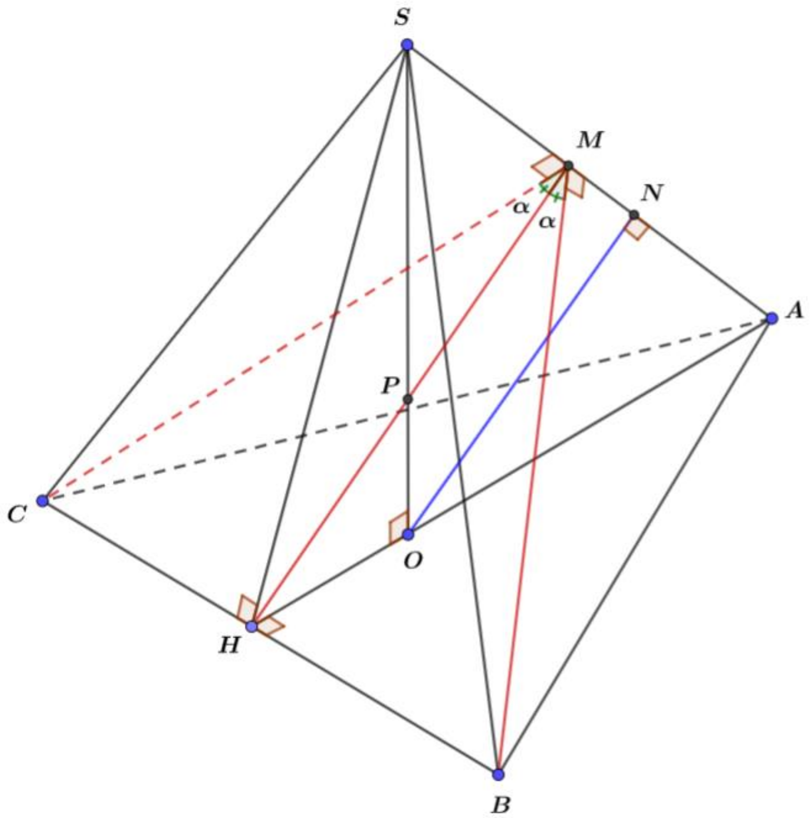
c) $\frac{2}{3}p^3\frac{tg^2(2\alpha)}{\sqrt{2-cotg^2(\alpha)}}$

d) $\frac{3}{2}p^2\frac{tg^2(\alpha)}{\sqrt{1-cotg^2(2\alpha)}}$

e) $\frac{9}{4}p^3\frac{tg^2(\alpha)}{\sqrt{3-cotg^2(\alpha)}}$

**Comentários**

Considerando que o ângulo é entre as faces laterais, temos:




Da figura, temos que $\Delta HMA \sim \Delta ONA$. Lembrando que o triângulo ABC é equilátero, temos:

$$\frac{HM}{ON} = \frac{AH}{AO}$$

$$\frac{HM}{p} = \frac{3}{2} \Rightarrow HM = \frac{3p}{2}$$

A aresta da base é:

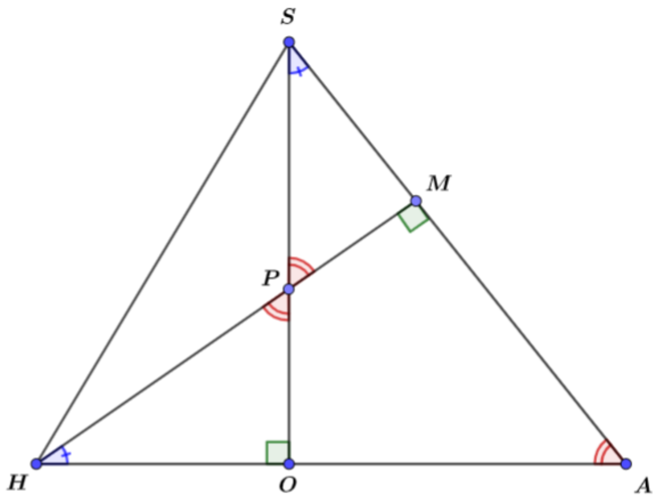
$$\Delta HMB: tg(\alpha) = \frac{HB}{HM} \Rightarrow HB = \frac{3p}{2} tg\alpha$$

$$L = BC = 2HB = 3p\ tg\alpha$$

A área da base é:

$$[ABC] = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}p^2}{4} tg^2\alpha$$

Do triângulo AHS:




$$\Delta HMA \sim \Delta AOS$$

$$\frac{HM}{AM} = \frac{OS}{AO} \Rightarrow OS = (AO)(HM)\frac{1}{AM}$$

$$AH^2 = AM^2 + HM^2$$

$$AH = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}p}{2} tg\alpha$$

$$AM^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}p}{2} tg\alpha\right)^2 - \left(\frac{3p}{2}\right)^2$$

$$AM = \frac{3p}{2}\sqrt{3tg^2\alpha - 1} = \frac{3p}{2}\sqrt{tg^2\alpha(3 - cotg^2\alpha)}$$

$$AM = \frac{3p}{2} tg\alpha\sqrt{3 - cotg^2\alpha}$$

$$AO = \frac{2}{3}AH = \sqrt{3}p\ tg\alpha$$

$$\therefore OS = (\sqrt{3}p\ tg\alpha)\left(\frac{3p}{2}\right)\left(\frac{1}{\frac{3p}{2} tg\alpha\sqrt{3 - cotg^2\alpha}}\right)$$

$$\therefore OS = \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{3 - cotg^2\alpha}}$$

O volume pedido é:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}p^2}{4} tg^2\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{3 - cotg^2\alpha}}\right) = \frac{9p^3}{4}\frac{tg^2\alpha}{\sqrt{3 - cotg^2\alpha}}$$

**Gabarito: E**

---

**22. (EN/2022)**

Sabendo que $\int_0^{\pi}\big(f(x) + sen(2x)\big)dx = 2$, assinale a alternativa que indica o valor de $\int_0^{\pi}\left(f(x) + 9\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right)dx$.

a) $1 + 3\pi$

b) $2 + 3\pi$

c) $2 + \pi$

d) $5$

e) $4$

**Comentários**

Da integral dada:

$$\int_0^{\pi}\big(f(x) + sen(2x)\big)dx = 2$$

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)\big)dx + \int_0^{\pi}\big(sen(2x)\big)dx = 2$$

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)\big)dx + \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)\big)dx + \left(-\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(0)}{2}\right) = 2$$

$$\therefore \int_0^{\pi}\big(f(x)\big)dx = 2$$

$$\int_0^{\pi}\left(f(x) + 9\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right)dx = \int_0^{\pi}\big(f(x)\big)dx + \int_0^{\pi}\left(9\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right)dx$$

$$= 2 + \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = 2 + \frac{9\pi^3}{3\pi^2} = 2 + 3\pi$$

**Gabarito: B**

---