INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2022

RESPOSTAS

PROVA DE MATEMÁTICA

2ªFASE

MATEMÁTICA

Questão 1. Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere um retângulo R de lados medindo $a = 9x^2 - 5x^4$ e $b = 8x - 8x^3$. Sabendo que o perímetro de R é 8, determine a e b.

Resolução:

(Etapa I)

Dado o perímetro $p = 2a + 2b = 8$, resulta

$$a + b = -5x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 8x = 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \,.$$

Consequentemente, o valor procurado para x está no conjunto das raízes reais da equação

$$5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 8x + 4 = 0\,, \qquad (i)$$

(Etapa II)

Uma vez que a e b são as medidas (> 0) dos lados do retângulo R, as raízes de (i) devem ainda respeitar as restrições

$$\begin{cases} a = x^2(9 - 5x^2) > 0 \quad \Rightarrow |x| < \dfrac{3\sqrt{5}}{5} & (ii) \\ \\ b = 8x(1 - x^2) > 0 \quad \Rightarrow x \in (0,1) \;\; ou \;\; x < -1 & (iii) \end{cases}$$

De (ii) e (iii) segue que: $\quad x \in (-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\,,\ -1) \quad$ ou $\quad x \in (0,1)\,. \qquad (*)$

(Etapa III)

Observando que $x = 1$ e $x = -1$ são raízes de (i), podemos reescrever esta equação na forma

$$5x^4 - 5x^2 + 8x^3 - 8x - 4x^2 + 4 \;=\; (5x^2 + 8x - 4)(x^2 - 1) \;=\; 0\,,$$

o que leva à seguinte fatoração

$$(x+2)(x+1)(x - \frac{2}{5})(x-1) = 0\,.$$

(Etapa IV)

Apenas a raiz $x = 2/5$ satisfaz $(*)$, o que resulta
$$\begin{cases} a = \dfrac{36}{25} - \dfrac{16}{125} = \dfrac{164}{125}\,. \\[2ex] b = \dfrac{16}{5} - \dfrac{64}{125} = \dfrac{336}{125}\,. \end{cases}$$

Critério de correção:

(Até 2 pontos) Etapa (I).

(Até 3 pontos) Etapa (II).

(Até 4 pontos) Etapa (III).

(Até 1 ponto) Etapa (IV).

Questão 2. Seja $z \in \mathbb{C}$ e denote por $\Im(z)$ a parte imaginária de z. Determine todos os possíveis $z \in \mathbb{C}$ com $\Im(z) \neq 0$ tais que z^3 e $(1+z)^3$ satisfazem simultaneamente $\Im(z^3) = 0$ e $\Im((1+z)^3) = 0$.

Resolução:

Etapa 1 (Até 4 pontos):

Escreva $z = a + bi$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

Note que $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ e $z^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$.

A hipótese $\Im(z^3) = 0$ implica $b(3a^2 - b^2) = 0$.

Como $b \neq 0$, temos $b^2 = 3a^2$ (I).

Critério: Até 4 pontos para determinar corretamente a relação (I).

Obs.: Até 2 pontos para quem determinar apenas umas das igualdades $b = \pm\sqrt{3}a$.

Etapa 2 (Até 4 pontos):

As hipóteses $\Im(z^3) = 0$ e $\Im(1+z)^3 = 0$ implicam

$$\Im(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = \Im(3z^2) + \Im(3z) = 6ab + 3b = 0.$$

Portanto, $a = -\dfrac{1}{2}$ (II) pois $b \neq 0$.

$\big($Obs.: Caso a hipótese $\Im(z^3) = 0$ não seja usada na equação acima, então

$$\Im(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = (3a^2b + 6ab + 3b) - b^3 = 3b(a+1)^2 - b^3 = 0.$$

Portanto, $3(a+1)^2 = b^2$ (III) pois $b \neq 0.\big)$

Critério: Até 4 Pontos para determinar corretamente a relação (II) $\big($ou a relação (III)$\big)$.

Etapa 3 (Até 2 pontos):

Juntando (I) e (II) OU (I) e (III), obtemos $a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

Critério: Até 2 pontos para concluir explicitamente que $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

Solução alternativa:

Etapa 1 (Até 4 pontos):

Escreva $z = |z|\big(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta\big)$.

Então $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i\ \mathrm{sen}\,3\theta)$.

A hipótese $\Im(z^3) = 0$ implica $\mathrm{sen}\,3\theta = 0$, uma vez que $|z| \neq 0$, e, portanto, $\theta = \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Como $\mathrm{sen}\,\theta \neq 0$, segue que $\theta = \dfrac{k\pi}{3}$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ (I).

Critério: Até 4 Pontos para determinar corretamente a relação (I).

Obs.: Até 2 pontos para quem determinar apenas $\theta = \dfrac{k\pi}{3}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Etapa 2 (Até 4 pontos): As hipóteses $\Im(z^3) = 0$ e $\Im(1+z)^3 = 0$ implicam

$$\Im(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = \Im(3z^2) + \Im(3z) = 3\big(\Im(z^2) + \Im(z)\big) = 0.$$

Assim,

$$\Im(z^2) + \Im(z) = |z|^2\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + |z|\ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) = |z|\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right)\left(2|z|\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + 1\right) = 0,$$

para $k \in \mathbb{Z} - 3Z$.

Como $|z|\mathrm{sen}\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) \neq 0$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$, segue que $|z| = \dfrac{-1}{2\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)}$ (II).

Critério: Até 4 pontos para determinar corretamente a relação (II).

Etapa 3 (Até 2 pontos):

Neste caso, $\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) < 0$, indicando que $\theta = \dfrac{k\pi}{3}$ é um ângulo do segundo ou terceiro quadrante.

Como consequência, $|z| = 1$, $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Critério: Até 2 pontos para concluir explicitamente que $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$.

MATEMÁTICA

Questão 3. Seja A a matriz com 5 linhas e 10 colunas cujas entradas $a_{n,m}$ são dadas por

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1 \\ n + a_{n,(m-1)}, & \text{se } m > 1 \end{cases}.$$

Determine a soma de todas as entradas de A.

Resolução:

A matriz do enunciado pode ser explicitada como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & 28 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 & 37 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 & 31 & 36 & 41 & 46 \end{pmatrix}.$$

Para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ observa-se que a linha n, determina uma PA de termo inicial 1 e de razão n com 10 termos.

Denotando por s a soma de todas as entradas de A temos

$$\begin{aligned} s = \sum_{n=1}^{5} \sum_{m=1}^{10} a_{n,m} &= 5 \sum_{n=1}^{5} (a_{n,1} + a_{n,10}) = \\ &= 5(11 + 20 + 29 + 38 + 47) \overset{PA}{=} 5\frac{5}{2}(11 + 47) = \\ &= 25 \cdot 29 = 725. \end{aligned}$$

Critério de correção:

(Até 2 pontos) Explicitar a matriz A.

(Até 4 pontos) Observar que as linhas/colunas determinam PA's e sua lei de formação.

(Até 2 pontos) Determinar a soma das colunas/linhas complementando o item anterior.

(Até 2 pontos) Obter o valor correto da soma de todas as entradas.

MATEMÁTICA

Questão 4. No jogo da velha, dois jogadores competem em um tabuleiro ordenado formado por 3 linhas e 3 colunas. Os jogadores se alternam marcando uma casa ainda não ocupada até que um deles ocupe toda uma linha, coluna ou diagonal, sendo declarado o vencedor. Quantas configurações diferentes do tabuleiro correspondem à vitória do primeiro jogador na sua terceira jogada?

Resolução:

Vamos denotar as marcações do primeiro jogador por "&". Para ele vencer na terceira jogada devemos ter uma das seguintes configurações (omitindo as marcações do segundo jogador):

$$
\begin{array}{c|c|c} \& & \& & \& \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \& & \& & \& \\ \hline & & \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline \& & \& & \& \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} \& & & \\ \hline \& & & \\ \hline \& & & \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c} & \& & \\ \hline & \& & \\ \hline & \& & \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} & & \& \\ \hline & & \& \\ \hline & & \& \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} \& & & \\ \hline & \& & \\ \hline & & \& \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c} & & \& \\ \hline & \& & \\ \hline \& & & \end{array}
\tag{1}
$$

Para cada uma das configurações acima, existem $\binom{6}{2} = 15$ maneiras de o perdedor preencher 2 das 6 casas restantes.

Totalizando $8 \cdot 15 = 120$ configurações diferentes do tabuleiro que correspondem à vitória do primeiro jogador na sua terceira jogada.

Critérios de correção:

- Concluir corretamente que existem as 8 configurações possíveis, apresentadas na Eq.1, para as marcações do primeiro jogador. **(Até 6 pontos)**
- Concluir corretamente que existem $8 \cdot \binom{6}{2} = 8 \cdot 15 = 120$ configurações diferentes do tabuleiro que correspondem à vitória do primeiro jogador na sua terceira jogada. **(Até 4 pontos)**

MATEMÁTICA

Questão 5. Considere $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ e $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Determine todos os valores de $\arccos(x)$ dado que x satisfaz $\arccos(x^4) + \operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4) = \pi/2$.

Resolução:

Partindo da equação dada, temos

$$\arccos(x^4) + \operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4) = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \arccos(x^4) = \pi/2 - \operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4).$$

Aplicando a função cos em ambos os lados da última equação, obtemos

$$x^4 = \cos(\arccos(x^4)) = \cos(\pi/2 - \operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4)) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4)) = x^2 - 1/4.$$

Ou seja, deve ocorrer

$$x^4 = x^2 - 1/4.$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$x^2 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}/2 \ \text{ ou } \ x = -\sqrt{2}/2.$$

Observamos que ambos os valores de x encontrados satisfazem as condições de definição das funções arccos e arcsen, pois

$$x^2 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x^4 = x^2 - 1/4 = 1/4 \ \in [-1,1].$$

Por fim, considerando que foi estabelecido o contradomínio $[0,\pi]$ para a função arccos, obtemos para $x = \sqrt{2}/2$, o valor $\arccos(x) = \pi/4$ e para $x = -\sqrt{2}/2$ o valor $\arccos(x) = 3\pi/4$.

Critério de correção:

(Até 4 pontos) Concluir que $x^4 = x^2 - 1/4$.

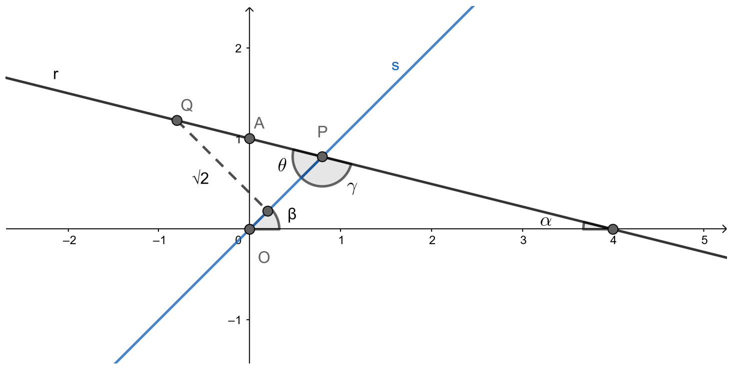
(Até 3 pontos) Encontrar $x = \pm\sqrt{2}/2$.

(Até 3 pontos) Encontrar $\arccos(x) = \pi/4$ e $\arccos(x) = 3\pi/4$.

Observação: Caso tenha encontrado um polinômio diferente, em que não foi explicitado que possui as raízes $x = \pm\sqrt{2}/2$, foi atribuída a nota 0.

Questão 6. Seja $A = (0,1)$. Considere a reta r de equação $y = 1 - x/4$ e seja s uma reta passando pela origem O e que intersecta r no $1^{\underline{o}}$ quadrante em um ponto P. Determine o ponto Q do $2^{\underline{o}}$ quadrante que pertence a r e dista $\sqrt{2}$ de s sabendo que $A\hat{P}O = \theta$ e que $\tan(\theta) = \frac{5}{3}$.

Resolução:



Como $\theta + \gamma = \pi$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, temos $\beta = \theta - \alpha$. Uma vez que $\tan(\theta) = \frac{5}{3}$ e $\tan(\alpha) = \frac{1}{4}$ pela inclinação da reta r, segue que

$$\tan(\beta) = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\alpha)}{1 - \tan(\theta)(-\tan(\alpha))} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{3}\frac{1}{4}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{17}{12}} = 1.$$

Assim a equação da reta s é $y = x$.

Como Q é ponto de r, terá coordenadas $Q = (a, 1 - \frac{a}{4})$. Impondo que a distância de Q a s é $\sqrt{2}$, temos

$$\sqrt{2} = \frac{\left|1 - \frac{a}{4} - a\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|1 - \frac{5a}{4}\right|}{\sqrt{2}},$$

e segue que

$$\frac{|4 - 5a|}{4} = 2.$$

As soluções da última equação são $a = -\frac{4}{5}$ e $a = \frac{12}{5}$. Como o ponto Q deve estar no segundo quadrante, $a < 0$ e descartamos a segunda solução.

Portanto

$$Q = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

Critério de correção:

(Até 1 ponto) Encontrar a igualdade $\beta = \theta - \alpha$.

(Até 3 pontos) Deduzir que $\tan(\beta) = 1$ e que a reta tem equação $y = x$.

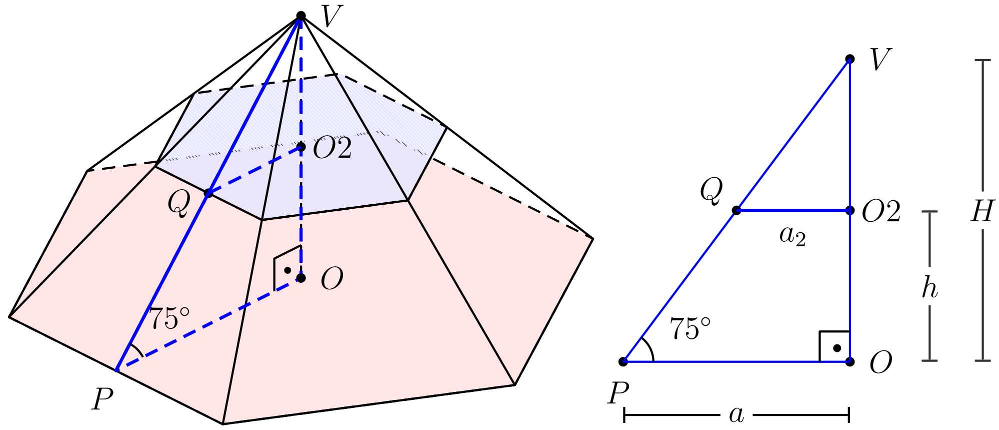
(Até 4 pontos) Encontrar a equação modular para as coordenadas de Q e suas duas soluções.

(Até 2 pontos) Concluir qual é a solução correta descartando a que fica no quadrante errado.

Questão 7. Considere T um tronco de pirâmide regular de altura $h = 4+2\sqrt{3}$ com bases hexagonais paralelas. Sabendo que o lado da maior base hexagonal mede $8\sqrt{3}/3$ e que o ângulo diedral entre as faces laterais e a base do tronco mede 75^o, determine o volume de T.

Resolução:

Estendemos o tronco de modo que formamos uma pirâmide de altura H e base hexagonal cujo lado mede $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Considere o triângulo VPO indicado na figura a seguir.



O lado OP é o apótema do hexágono de lado $\ell = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ e, portanto,

$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Para determinar a altura H da pirâmide, precisamos do valor de $\operatorname{tg} 75°$. Temos

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Logo, do triângulo VPO, obtemos

$$H = \operatorname{tg} 75° \cdot a = (2+\sqrt{3}) \cdot 4 = 8 + 4\sqrt{3} = 2h.$$

Como os triângulos VQO_2 e VPO são semelhantes e $H = 2h$, temos $a = 2a_2$ e, portanto, $a_2 = 2$.

Agora, observe que a_2 é o apótema do hexágono menor e mede a metade do apótema do hexágono maior. Assim, se denotarmos por ℓ_2 o lado do hexágono menor, temos

$$\ell_2 = \frac{\ell}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Sejam A_B e A_b as áreas do hexágono maior e menor, respectivamente. Utilizando a fórmula $A_B = p \cdot a$ em que p é o semi-perímetro, temos

$$A_B = \frac{6}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}.$$

Analogamente,

$$A_b = \frac{6}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}.$$

Se V_T, V_P e V_p denotam, respectivamente, o volume do tronco, o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor, então

$$\begin{aligned} V_T = V_P - V_p &= \frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3} \\ &= \frac{(2A_B - A_b) \cdot h}{3} = \frac{56\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})}{3}. \end{aligned}$$

Critério de correção:

(Até 2 pontos) Determinar o valor de $\operatorname{tg} 75^\circ$ corretamente.

(Até 3 pontos) Determinar a altura H da pirâmide.

(Até 1 ponto) Determinar o lado do hexágono menor. Caso esse valor tenha sido encontrado por outro método (sem precisar encontrar a altura H), foi atribuído diretamente até 4 pontos.

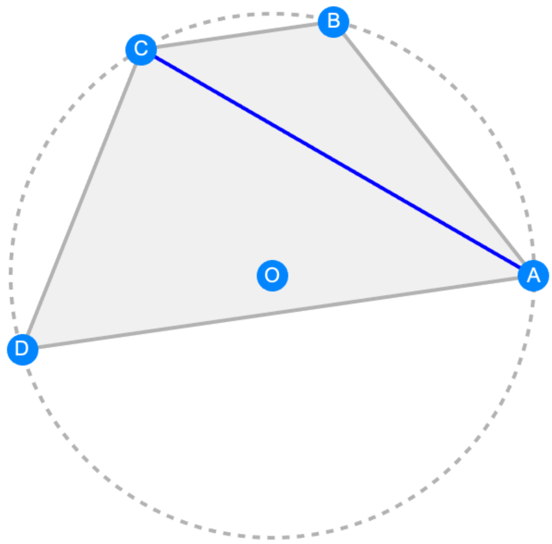
(Até 2 pontos) Determinar a área do hexágono maior corretamente.

(Até 2 pontos) Determinar o volume do tronco corretamente.

Observação: Caso o candidato tenha marcado erroneamente a localização do ângulo de 75°, então a nota máxima atribuída é de 5 pontos (Até 2 pela tangente, até 2 pela área do hexágono e até 1 pela fórmula do volume do tronco).

Questão 8. Seja Q um quadrilátero de vértices A, B, C e D cujos lados satisfazem $m(\overline{AB}) = 5 = m(\overline{CD})$, $m(\overline{BC}) = 3$ e $m(\overline{DA}) = 8$. Sabendo que Q é inscrito em uma circunferência de raio r, determine r.

Resolução:



O quadrilátero do problema (a menos de uma rotação).

Observação: O candidato precisa justificar que o quadrilátero em questão é um trapézio isósceles antes aproveitar suas propriedades.

(Etapa I) Da lei dos cossenos para os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, tem-se:

$$\begin{cases} m(\overline{CA})^2 = m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2 - 2 \times m(\overline{AB}) \times m(\overline{BC}) \times \cos \hat{B} \\ m(\overline{CA})^2 = m(\overline{CD})^2 + m(\overline{DA})^2 - 2 \times m(\overline{CD}) \times m(\overline{DA}) \times \cos \hat{D} \end{cases}.$$

(Etapa II) O quadrilátero é inscrito em uma circunferência, logo

$$\hat{B} + \hat{D} = \pi.$$

(Etapa III) Portanto, o sistema fica

$$\begin{cases} m(\overline{CA})^2 = 25 + 9 - 30\cos\hat{B} \\ m(\overline{CA})^2 = 25 + 64 + 80\cos\hat{B} \end{cases} \implies \begin{cases} m(\overline{CA})^2 = 34 - 30\cos\hat{B} \\ 0 = -55 - 110\cos\hat{B} \end{cases} \implies \begin{cases} m(\overline{CA})^2 = 49 = 7^2 \\ \cos\hat{B} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

(Etapa IV) O triângulo $\triangle ABC$ também é inscrito na mesma circunferência, logo a área E desse triângulo é dada por

$$E = \frac{m(\overline{AB}) \times m(\overline{BC}) \times m(\overline{CA})}{4r},$$

e

$$E = \sqrt{\tau(\tau - m(\overline{AB}))(\tau - m(\overline{BC}))(\tau - m(\overline{CA}))},$$

em que $\tau = \dfrac{m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) + m(\overline{CA})}{2} = \dfrac{15}{2}$.

(Etapa V) Portanto,

$$\frac{m(\overline{AB}) \times m(\overline{BC}) \times m(\overline{CA})}{4r} = \sqrt{\tau(\tau - m(\overline{AB}))(\tau - m(\overline{BC}))(\tau - m(\overline{CA}))} \implies$$

$$\frac{7 \times 15}{4r} = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{1}{2}} \implies r = \frac{\frac{7\times 15}{4}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = 7\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Critério de correção:

(Até 3 pontos) Etapa I.

(Até 2 pontos) Etapa II.

(Até 1 ponto) Etapa III.

(Até 3 pontos) Etapa IV.

(Até 1 ponto) Etapa V.

MATEMÁTICA

Questão 9. Sejam $P_1 = (0, 6)$, $P_2 = (1, 5)$ e $P_3 = (2, 6)$ e sejam C_1, C_2 e C_3 circunferências centradas em P_1, P_2 e P_3, respectivamente. Sabendo que existe uma reta horizontal que é tangente a C_1, C_2 e C_3 determine $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ quando este não for vazio.

Resolução:

Sejam:

F um ponto qualquer pertencente à interseção $C_1 \cap C_2 \cap C_3$;

t a reta horizontal tangente comum de C_1, C_2, C_3;

r_1, r_2, r_3 os raios de C_1, C_2, C_3, respectivamente.

Etapa 1 (Até 4 pontos):

Como t é tangente à C_1, temos que a distância do centro de C_1 à reta t é r_1 ($d(P_1, t) = r_1$).

Como F é um ponto de C_1, temos $d(P_1, F) = r_1$.

Analogamente, temos

$$d(P_2, t) = r_2, \quad d(P_2, F) = r_2, \quad d(P_3, t) = r_3 \ \text{ e } \ d(P_3, F) = r_3.$$

Isto significa que P_1, P_2 e P_3 são pontos da parábola cujo foco é F e cuja reta diretriz é t.

Etapa 2 (Até 4 pontos):

Como a reta diretriz t é uma reta horizontal, a equação desta parábola é da forma

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (*)$$

Note que os pontos P_1 e P_3 possuem a mesma ordenada.

Além disso, a abscissa de P_2 é a média das abcissas de P_1 e P_3.

Portanto, o vértice da parábola é $(x_0, y_0) = (1, 5)$, ou seja, é o ponto P_2.

Substituindo $P_3 = (2, 6)$ em $(*)$, obtemos $(2 - 1)^2 = 2p(6 - 5)$.

Logo, $p = \dfrac{1}{2}$.

Etapa 3 (Até 2 pontos):

Juntando as informaçõs acima, segue que o ponto F é único e é dado por

$$F = \left(1, 5 + \frac{p}{2}\right) = \left(1, \frac{21}{4}\right).$$

Solução alternativa:

Sejam:

$t : y = k$ a reta horizontal tangente comum de C_1, C_2, C_3;

r_1, r_2, r_3 os raios de C_1, C_2, C_3, respectivamente.

Etapa 1 (Até 4 pontos):

As equações cartesianas de C_1, C_2 e C_3 são dadas por:

I) $x^2 + (y-6)^2 = (6-k)^2$;

II) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = (5-k)^2$;

III) $(x-2)^2 + (y-6)^2 = (6-k)^2$.

Para o obter o conjunto $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ devemos ter $x^2 + (y-6)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2$.

E, portanto, temos $x^2 = x^2 - 4x + 4$ e, consequentemente, $x = 1$.

Critério: Até 2 pontos para encontrar as equações das circunferências em função de k.

2 pontos para encontrar a abscissa do ponto de interseção dessas circunferências.

Etapa 2 (Até 4 pontos):

Substituindo em II), temos $y - 5 = 5 - k$ ou $y - 5 = k - 5$.

A condição $y - 5 = k - 5$ equivale a $y = k$ e não pode ser satisfeita por um ponto na interseção das circunferências uma vez que substituindo $y = k$ em I) teremos $x = 0$. Portanto, $y = 10 - k$ $(*)$.

Substituindo $x = 1$ e $y = 10 - k$ em III), obtemos $1 + (4-k)^2 = (6-k)^2$.

Segue daí que $k = \dfrac{19}{4}$ $(**)$.

Critério: Até 4 pontos para encontrar o valor de k.

Etapa 3 (Até 2 pontos):

Segue de $(*)$ e $(**)$ que $y = \dfrac{21}{4}$. Logo, $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \left\{\left(1, \dfrac{21}{4}\right)\right\}$.

Critério: Até 2 pontos para encontrar explicitamente o ponto de interseção das três circunferências.

Questão 10. Considere um octaedro regular de aresta de comprimento l_1. Inscreva nesse octaedro um cubo cujos vértices estão nos baricentros das faces do octaedro. Dentro desse cubo inscreva um novo octaedro regular de aresta de comprimento l_2 cujos vértices estão nos centros das faces do cubo. Continue com esse processo obtendo uma sequência l_i para $i \in \mathbb{N}$. Determine então o valor da razão l_{10}/l_1.

Resolução:

Considere um octaedro regular de aresta de comprimento l_i. Seja L_i o comprimento da aresta do cubo inscrito nesse octaedro, conforme Figura 1.

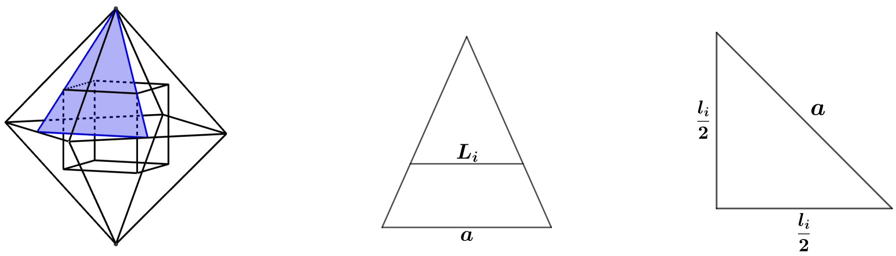


Figura 1: Cubo inscrito no octaedro regular.

Como o baricentro divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra, temos

$$\frac{L_i}{2} = \frac{a}{3}$$

mas,

$$a^2 = 2\frac{l_i^2}{4}$$

ou seja,

$$a = \frac{l_i\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e assim,} \qquad L_i = \frac{l_i\sqrt{2}}{3}.$$

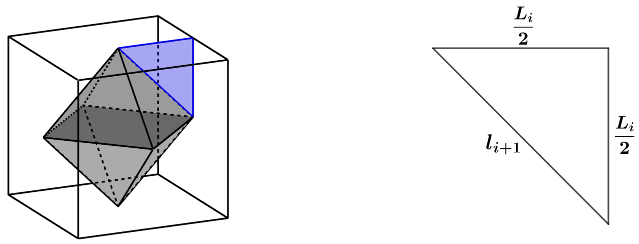


Figura 2: Octaedro regular inscrito no cubo.

Por sua vez no octaedro inscrito no cubo de lado L_i temos

$$l_{i+1} = \frac{L_i\sqrt{2}}{2}.$$

Desta forma tem-se que

$$\frac{l_{i+1}}{l_i} = \frac{l_{i+1}}{L_i}\frac{L_i}{l_i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\frac{l_{10}}{l_1} = \frac{1}{3^9}.$$

Critério de correção:

(Até 3 pontos) Encontrar a relação $L_i = l_i\sqrt{2}/3$.

(Até 3 pontos) Encontrar a relação $l_{i+1} = L_i\sqrt{2}/2$.

(Até 2 pontos) Observar que a razão entre as arestas de dois octaedros consecultivos é igual a $1/3$.

(Até 2 pontos) Obter a razão l_{10}/l_1.