Estratégia Militares

Correção

Prova IME 2022

Segunda Fase

Prof. Victor So

Prova Resolvida

1. (IME/2022)

Seis irmãos conversavam quando um deles, Matias, enunciou: a soma das idades de todos nós é cinco vezes a minha idade atual e sou seis anos mais novo que Sófocles. Quando Sófocles tiver três vezes a minha idade atual, constataremos que:

- a soma da minha idade com a de Dâmocles será igual à soma da idade atual dos irmãos de César;

- a idade de Erastóstenes será três vezes a idade dele atual; e

- a idade do Lutero será duas vezes a idade atual do Sófocles, mais um ano.

Diante do exposto, qual é a soma das idades atuais de Sófocles e Matias?

Comentários

Sejam M, S, D, C, E e L, as idades de Matias, Sófocles, Dâmocles, César, Erastótenes e Lutero, respectivamente.

Assim, temos:

"Matias, enunciou: a soma das idades de todos nós é cinco vezes a minha idade atual e sou seis anos mais novo que Sófocles"

$$M + S + D + C + E + L = 5M$$

$$M = S - 6$$

Quando Sófocles tiver 3 vezes a idade de Matias, teremos $S' = 3M$ e:

$$M' + D' = M + S + D + E + L$$

$$E' = 3E$$

$$L' = 2S + 1$$

Em que S', M', D', E', L' indicam a idade quando Sófocles tiver 3 vezes a idade de Matias.

Seja t o tempo que passou até isso acontecer, logo:

$$S' = 3M = t + S \Rightarrow t = 3M - S$$

Assim, temos:

$$E' = 3E = E + t \Rightarrow 2E = 3M - S \Rightarrow E = \frac{3M - S}{2}$$

$$L' = 2S + 1 = L + t \Rightarrow 2S + 1 = L + 3M - S \Rightarrow L = 3S - 3M + 1$$

$$M' + D' = M + S + D + E + L = M + t + D + t$$

$$S + E + L = 2t$$

Substituindo E e L:

$$S + \frac{3M - S}{2} + 3S - 3M + 1 = 2(3M - S)$$

$$2S + 3M - S + 6S - 6M + 2 = 12M - 4S$$

$$7S - 3M + 2 = 12M - 4S$$
$$15M = 11S + 2$$

Sabendo que $M = S - 6$, obtemos:

$$15(S - 6) = 11S + 2$$
$$4S = 92 \therefore S = 23$$
$$\Rightarrow M = \frac{11 \cdot 23 + 2}{15} = \frac{255}{15} = 17$$

Portanto:

$$S + M = 23 + 17$$
$$S + M = 40$$

Gabarito: $S + M = 40$

---

2. (IME/2022)

Suponha que a e b são raízes reais e diferentes da equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). O intervalo $[a, b]$ é o domínio da função $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$. Seja $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$. Determine $g(0)$.

Comentários

Analisando a equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0$:

$$\Delta = (-4t)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 16(t^2 + 1) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Raízes:

$$x = \frac{4t \pm \sqrt{16(t^2 + 1)}}{8} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 1}}{2}$$

Assim, temos que

$$a = \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2} \ e \ b = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}$$

Para $g(0)$, temos $t = 0$, logo:

$$4x^2 - 4tx - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$
$$a = -\frac{1}{2} \ e \ b = \frac{1}{2}$$

Analisando a monotonicidade da função no intervalo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

O denominador sempre é positivo e o numerador é uma parábola com concavidade para baixo com vértice em:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

Sendo as raízes do numerador os números -1 e 1, temos que no intervalo $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, a função é estritamente crescente. Logo, o mínimo ocorre em $x=-1/2$ e o máximo em $x=1/2$:

$$g(0)=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}-\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

$$\therefore g(0)=\frac{8}{5}$$

Gabarito: $g(0)=\frac{8}{5}$

---

3. (IME/2022)

Em um triângulo de vértices $A(0,0), B(2,4)$ e $C(6,0)$, toma-se um ponto variável M sobre o lado AB. Desse ponto, traça-se a perpendicular ao lado AC que intercepta em Q.

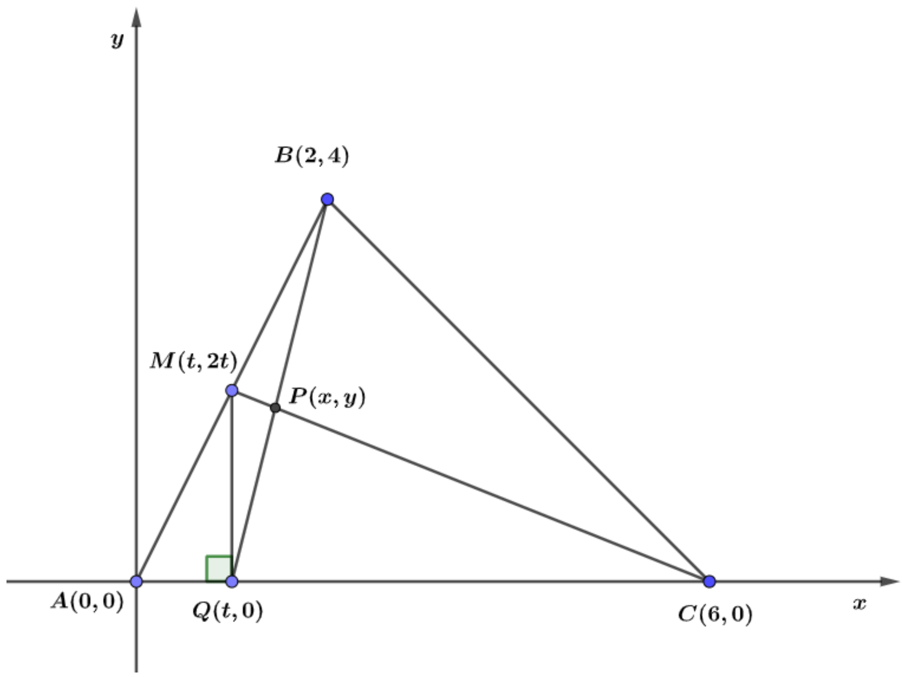
Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção das retas BQ e CM e escreva a sua equação.

Comentários

A reta que contém os pontos A e B é dada por:

$$r_{AB}: y=2x$$

Como $M\in\overline{AB}$, temos que as coordenadas de M são da forma $(t,2t)$, com $0\le t\le 2$. Assim, temos a seguinte figura:



Se $t=2$, temos que $M\equiv P\equiv B(2,4)$ e se $t=0$, temos que $M\equiv P\equiv A(0,0)$. Note que para $M\in\overline{AB}$, temos de $P(x,y)$ que $0\le x\le 2$ e $0\le y\le 4$.

Caso $t\neq 2\ e\ t\neq 0$:

Encontrando a equação das retas BQ e CM:

$$m_{BQ}=\frac{4}{2-\mathrm{t}}\Rightarrow r_{BQ}\colon y-4=\frac{4}{2-\mathrm{t}}(x-2)\Rightarrow \boxed{r_{BQ}\colon y=\frac{4}{2-\mathrm{t}}(x-2)+4}$$

$$m_{CM}=\frac{2\mathrm{t}}{\mathrm{t}-6}\Rightarrow \boxed{r_{CM}\colon y=\frac{2\mathrm{t}}{\mathrm{t}-6}(x-6)}$$

Igualando as equações de retas, obtemos:

$$\frac{4}{2-\mathrm{t}}(x-2)+4=\frac{2\mathrm{t}}{\mathrm{t}-6}(x-6)$$

$$4(x-2)(t-6)+4(2-t)(t-6)=2t(x-6)(2-t)$$

Simplificando a equação e isolando x, encontramos:

$$\therefore \boxed{x=\frac{8t(t-3)}{t^2-12}}$$

Substituindo x na equação da reta r_{CM}:

$$y=\frac{2\mathrm{t}}{\mathrm{t}-6}\left(\frac{8t(t-3)}{t^2-12}-6\right)=\frac{2t}{t-6}\left(\frac{8t^2-24t-6t^2+72}{t^2-12}\right)=\frac{2t(2t^2-24t+72)}{(t-6)(t^2-12)}$$

$$y=\frac{4t(t-6)^2}{(t-6)(t^2-12)}$$

$$\therefore \boxed{y=\frac{4t(t-6)}{t^2-12}}$$

Dividindo x por y:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{8t(t-3)}{t^2-12}}{\frac{4t(t-6)}{t^2-12}}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{2(t-3)}{t-6}\Rightarrow tx-6x=2ty-6y\Rightarrow t(x-2y)=6(x-y)$$

$$\therefore \boxed{t=\frac{6(x-y)}{x-2y}}$$

Substituindo na equação de r_{BQ}:

$$y=\frac{4}{2-\left[\frac{6(x-y)}{x-2y}\right]}(x-2)+4=\frac{(4x-8)(x-2y)}{2x-4y-6x+6y}+4$$

$$(y-4)(2y-4x)=4(x-2)(x-2y)$$

$$(y-4)(y-2x)=2(x-2)(x-2y)$$

$$y^2-2xy-4y+8x=2x^2-4xy-4x+8y$$

$$\therefore \boxed{2x^2-2xy-y^2-12x+12y=0}$$

Com $0\le x\le 2$ e $0\le y\le 4$.

Analisando a equação do lugar geométrico e verificando sobre a possibilidade de ser uma cônica degenerada:

$$2x^2-2x(y+6)-y^2+12y=0$$

$$\Delta = [-2(y+6)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2 + 12y)$$
$$\Delta = 4(y^2 + 12y + 36) + 8y^2 - 96y$$
$$\Delta = 12y^2 - 48y + 144 = 12(y^2 - 4y + 12)$$

Analisando os valores de Δ:

$$\Delta' = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -32 < 0$$

Logo, temos que $\forall y\ \Delta > 0$, então a solução em x é real.

Como Δ não é um quadrado perfeito, então não podemos ter um par de retas como solução.

Analisando o discriminante da equação da cônica:

$$B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(2)(-1) = 4 + 8 = 12 > 0$$

Portanto, a equação do lugar geométrico representa uma hipérbole rotacionada.

Gabarito: hipérbole rotacionada de equação $2x^2 - 2xy - y^2 - 12x + 12y = 0$

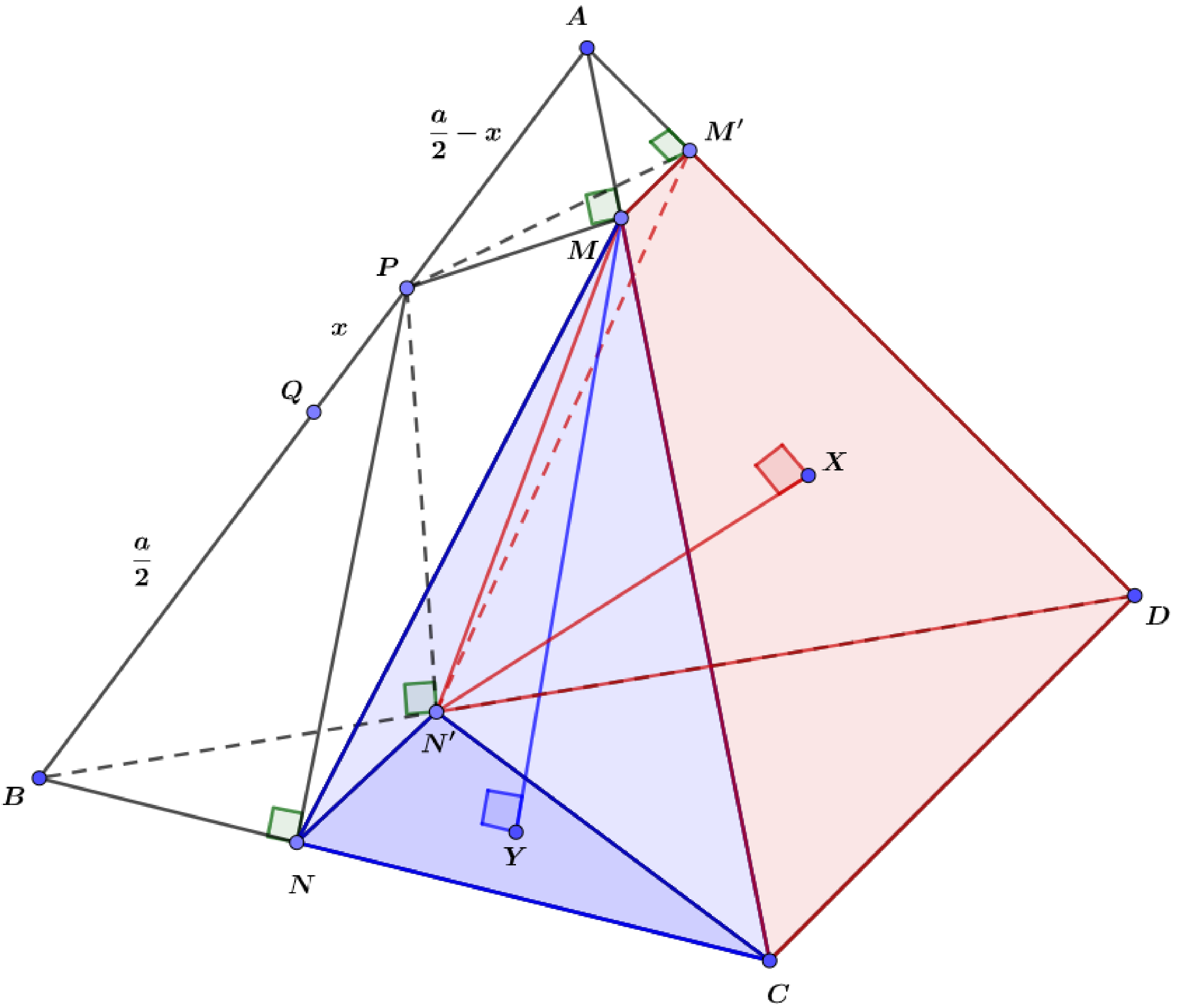
---

4. (IME/2022)

Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e o ponto Q médio de AB. O ponto P sobre a aresta AB, entre Q e A, é projetado nas arestas AC e AD, sobre os pontos M e M' respectivamente, e também nas arestas BC e BD, sobre os pontos N e N', respectivamente. O plano $MM'NN'$ divide o tetraedro em dois volumes com razão de 1 para 4. Determine QP em função de a.

Comentários

Desenhando a figura, obtemos:



O enunciado diz que o plano MM'NN' divide o tetraedro em dois volumes com razão de 1 para 4. Pela figura, podemos ver que o menor sólido é o da esquerda e o maior sólido é o da direita (colorido). Temos que a soma do volume da esquerda com o volume da direita deve ser igual ao volume do tetraedro, logo:

$$V_{esquerda} + V_{direita} = V_{tetraedro}$$

Temos que $V_{direita} = 4V_{esquerda}$, logo:

$$\frac{V_{direita}}{4} + V_{direita} = V_{tetraedro}$$

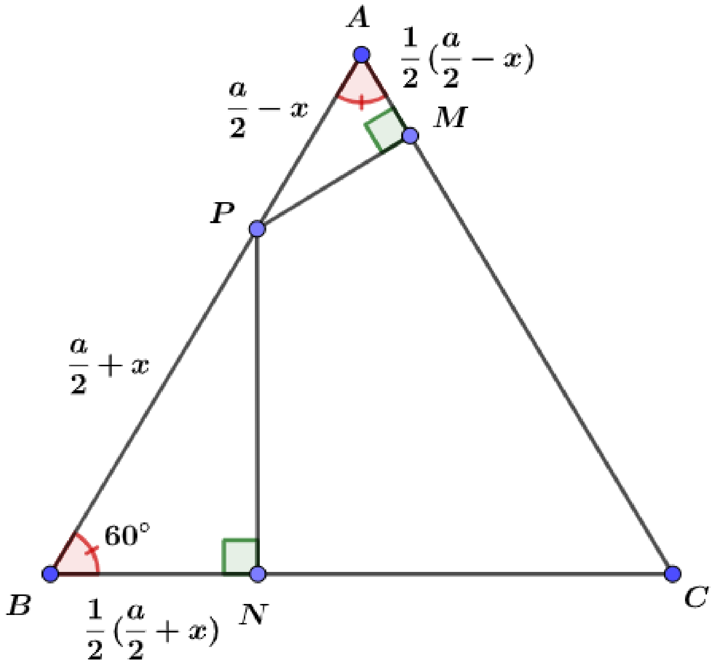
$$\therefore V_{direita} = \frac{4}{5} V_{tetraedro}$$

Sabendo que o tetraedro regular tem aresta de medida a, seu volume é:

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \therefore V_{direita} = \frac{4}{5}\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Note que o sólido da direita pode ser dividido em duas pirâmides, a triangular $MNN'C$ e a quadrangular $N'MM'DC$. Seja V_1 o volume da pirâmide quadrangular e V_2 o volume da pirâmide triangular.

Da face ABC, temos:



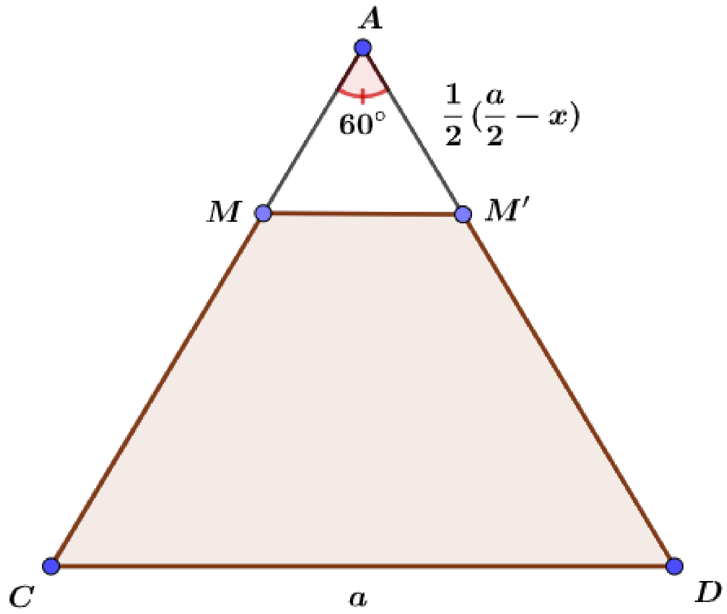
Pela simetria, temos que:

$$AM = AM' = \left(\frac{a}{2} - x\right)\cos 60° = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)$$

$$BN = BN' = \left(\frac{a}{2} + x\right)\cos 60° = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x\right)$$

Analisando a face ACD, vemos que AMM' é isósceles com ângulo de 60° no vértice, logo AMM' é triângulo equilátero. Analogamente para BNN' na face BCD.

Assim, temos que a área do quadrilátero MM'DC é:



$$[MM'DC] = [ACD] - [AMM'] = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right)\right]^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore [MM'DC] = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{15a^2}{4} + ax - x^2\right)$$

Calculando a altura $N'X$ por semelhança e lembrando que a altura do tetraedro regular é $a\sqrt{6}/3$, temos:

$$\frac{N'X}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{N'D}{BD} = \frac{BD - BN'}{BD} = \frac{a - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x\right)}{a}$$

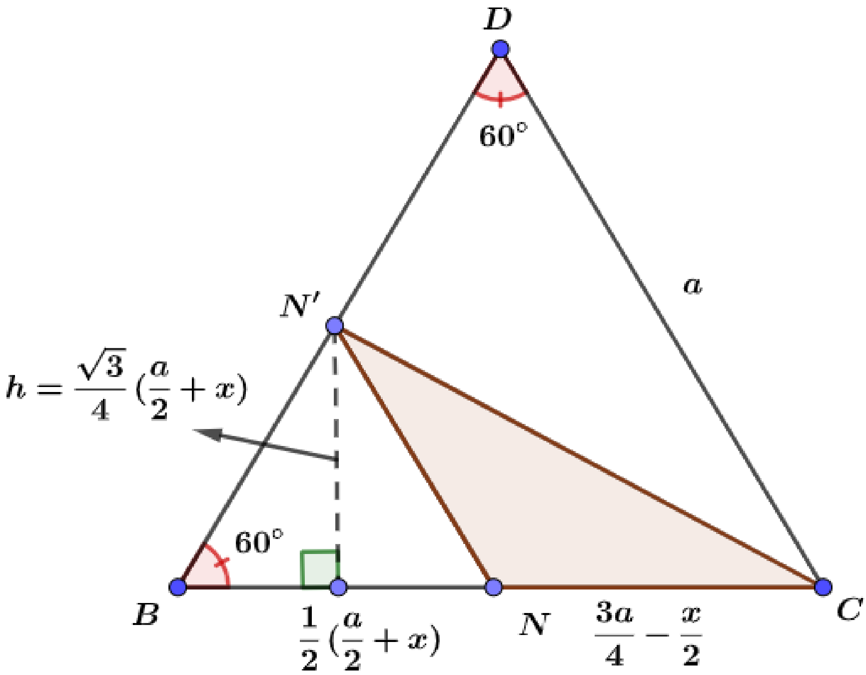
$$\Rightarrow N'X = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Portanto, V_1 é:

$$V_1 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{15a^2}{4} + ax - x^2\right)\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{V_1 = \frac{\sqrt{2}}{96}\left(\frac{15a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} - x\right)}$$

Analisando a face BCD:



O lado NC é

$$NC = a - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x\right)\right] = \frac{3a}{4} - \frac{x}{2}$$

A altura do triângulo equilátero BNN' é:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2} + x\right)$$

Assim, temos que a área de NN'C é:

$$[NN'C] = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{4} - \frac{x}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2} + x\right)\right]$$

$$[NN'C] = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{3a^2}{4} + ax - x^2\right)$$

Calculando a altura MY por semelhança:

$$\frac{MY}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{MC}{AC} = \frac{AC - AM}{AC} = \frac{\left(a - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)\right)}{a}$$

$$MY = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

Calculando V_2:

$$V_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{3a^2}{4} + ax - x^2\right)\right]\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{V_2 = \frac{\sqrt{2}}{96}\left(\frac{3a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} + x\right)}$$

Assim, temos:

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{96}\left(\frac{15a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} - x\right) + \frac{\sqrt{2}}{96}\left(\frac{3a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} + x\right) = \frac{1}{5}\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$\left(\frac{15a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} - x\right) + \left(\frac{3a^2}{4} + ax - x^2\right)\left(\frac{3a}{2} + x\right) = \frac{32a^3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{27a^2}{4} - 3x^2 = \frac{32a^2}{5}$$

$$x^2 = \frac{7a^2}{60}$$

$$x = a\sqrt{\frac{7}{60}}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{105}}{30}$$

Gabarito: $PQ = \frac{a\sqrt{105}}{30}$

---

5. **(IME/2022)**

Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = ky \\ (1-k)x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - kz = z \end{cases}$$

Determine o menor valor da constante real k que torna o sistema indeterminado. Para esse valor de k, encontre a solução x, y, z do sistema acima que minimiza o valor de $(x-z)^2 + e^{x+y} - 4|x| - 2y$.

Comentários

O sistema é linear homogêneo, logo apenas pode ser possível e determinado ou indeterminado.

$$\begin{cases} 3x + (2-k)y - z = 0 \\ (1-k)x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - (k+1)z = 0 \end{cases}$$

Assim, basta que o determinante do sistema seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2-k & -1 \\ 1-k & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -k-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3(k+1)+8(2-k)-(1-k)-2-12-(-k-1)(1-k)(2-k)=0$$

$$3k+3+16-8k-1+k-2-12+(1+k)(1-k)(2-k)=0$$

$$4-4k+(1+k)(1-k)(2-k)=0$$

$$4(1-k)+(1+k)(1-k)(2-k)=0$$

$$(1-k)(4+2-k+2k-k^2)=0$$

$$(1-k)(6+k-k^2)=0$$

$$(1-k)(k^2-k-6)=0$$

$$(1-k)(k-3)(k+2)=0$$

$$\therefore k=1 \; ou \; k=3 \; ou \; k=-2$$

O menor valor de k é -2. O sistema torna-se:

$$\begin{cases} 3x+4y-z=0 \;\; (I) \\ 3x-y+4z=0 \;\; (II) \\ 2x+y+z=0 \;\; (III) \end{cases}$$

Fazendo $(II)+(III)$ e $(I)+(III)$:

$$5x+5z=0 \Rightarrow z=-x$$

$$5x+5y=0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-z$$

Assim, a solução é da forma $(x,y,z)=(\alpha,-\alpha,-\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analisando a expressão e lembrando que $x+y=0$, temos:

$$(x-z)^2+e^{x+y}-4|x|-2y=(2\alpha)^2+e^0-4|\alpha|-2(-\alpha)$$

$$f(\alpha)=4\alpha^2+2\alpha-4|\alpha|+1$$

Para $\alpha \geq 0$:

$$f(\alpha)=4\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 4\cdot 1=-12<0 \therefore f(\alpha)>0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

O menor valor é:

$$\alpha_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2(4)}=\frac{1}{4} \Rightarrow f_{min}=4\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+1=\frac{3}{4}$$

Para $\alpha < 0$:

$$f(\alpha)=4\alpha^2+6\alpha+1$$

$$\Delta=(6)^2-4\cdot 4\cdot 1=20$$

As raízes são:

$$\alpha=\frac{-6\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-6\pm 2\sqrt{5}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$$

Ambas são negativas, logo temos que o vértice da parábola também será negativo:

$$\alpha_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2(4)}=-\frac{3}{4}$$

O menor valor é:

$$f_{min} = 4\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 1 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

Portanto, temos que a solução que minimiza a expressão é:

$$S = \left\{\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)\right\}$

---

6. **(IME/2022)**

Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ que corresponde à solução da equação:

$$4^{\log_2 sen(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0$$

Comentários

Analisando a condição de existência:

$$sen\, x > 0 \Rightarrow x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), com\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq 0$$

Resolvendo a equação:

$$4^{\log_2 sen(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0$$

$$2^{2\log_2 sen(x)} + \log_{2^2} 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$2^{\log_2 sen^2(x)} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$sen^2(x) + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{x}{2|x|} = 0$$

Usando $\cos(2x) = 1 - 2sen^2x$:

$$sen^2(x) + \frac{1 - 2sen^2x}{2} + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$sen^2(x) + \frac{1}{2} - sen^2x + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$\frac{x}{2|x|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{|x|} = -1$$

Se $x > 0$:

$$\frac{x}{x} = -1 \Rightarrow 1 = -1\ (absurdo!)$$

Se $x < 0$:

$$\frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

Assim, temos que ter $x < 0$ e $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$, logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 2k\pi < x < (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}_-^*\}$$

Gabarito: $S = \{x \in \mathbb{R} | 2k\pi < x < (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}_-^*\}$

---

7. (IME/2022)

Sejam os pontos a e b, no plano complexo, representados pelos números $a = 9 + xi$ e $b = y + 3i$, onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. O ponto a é a rotação de 30° do ponto b em torno da origem no sentido anti-horário. Determine o valor do produto xy.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos que:

$$a = b\, cis(30°)$$

$$9 + xi = (y + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$9 + xi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right)i$$

Igualando as partes real e imaginária:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2} = 9 \Rightarrow \sqrt{3}y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} + \frac{21}{\sqrt{3}}\right)$$

Calculando o produto:

$$xy = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} + \frac{21}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{21}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(63 + 21 \cdot \frac{21}{3}\right) = \frac{1}{2}(63 + 147) = \frac{210}{2} = 105$$

$$\therefore xy = 105$$

Gabarito: $xy = 105$

---

8. (IME/2022)

Em uma sala com 11 estudantes, um professor decidiu aplicar um trabalho dividindo aleatoriamente a turma em três grupos de 3 estudantes e um grupo de 2 estudantes. Sabendo que na turma há um casal, qual é a probabilidade de que o mesmo faça o trabalho junto?

Comentários

A probabilidade pedida é:

$$p = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n_f}{n_p}$$

Calculando as possibilidades, temos:

- Escolha da primeira tripla: $\binom{11}{3}$

- Escolha da segunda tripla: $\binom{8}{3}$

- Escolha da terceira tripla: $\binom{5}{3}$

- Escolha da dupla (restante): $\binom{2}{2}$

Pelo princípio multiplicativo e lembrando que devemos dividir por 3! para desconsiderar a ordenação do grupo de 3 alunos:

$$n_p = \frac{\binom{11}{3}\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{3!}$$

Para os casos favoráveis:

1) O casal está num grupo de 2:

$$\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!}$$

2) O casal está num grupo de 3:

$$\frac{9\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{2!}$$

Nesse caso, temos que a forma de escolher a primeira tripla considerando o casal junto é $C_{9,1} = 9$ e dividimos por 2 para desconsiderar a ordenação dos outros grupos de 2.

Logo, a probabilidade é:

$$p = \frac{\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!} + \frac{9\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{2!}}{\frac{\binom{11}{3}\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{3!}} = \frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} + 27\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{\frac{\binom{11}{3}\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{3!}}$$

$$p = \frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3!\,3!\,3!} + \frac{27(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4)}{3!\,3!\,2!}}{\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3!\,3!\,3!\,2!}}$$

$$p = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2 + 27\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 6}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$$

$$p = \frac{2 + 3\cdot 6}{11\cdot 10} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11}$$

$$\therefore p = \frac{2}{11}$$

Gabarito: $p = \frac{2}{11}$

---

9. (IME/2022)

Sabendo-se que $\frac{sen^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$ com $a \neq 0, b \neq 0$ e $a + b \neq 0$, determine $\frac{sen^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$ em função de a e b somente.

Comentários

Temos:

$$\frac{sen^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}\Rightarrow b\,sen^4\alpha+a\underbrace{\cos^4\alpha}_{(\cos^2\alpha)^2}=\frac{ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow b\,sen^4\alpha+a(1-sen^2\alpha)^2=\frac{ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow b\,sen^4\alpha+a(1-2sen^2\alpha+sen^4\alpha)=\frac{ab}{a+b}$$

$$(a+b)sen^4\alpha-2a\,sen^2\alpha+a-\frac{ab}{a+b}=0$$

$$(a+b)sen^4\alpha-2a\,sen^2\alpha+\frac{a^2}{a+b}=0$$

Como $a+b\neq 0$:

$$(a+b)^2sen^4\alpha-2a(a+b)sen^2\alpha+a^2=0$$

$$[(a+b)sen^2\alpha-a]^2=0\therefore sen^2\alpha=\frac{a}{a+b}$$

Pela relação fundamental:

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{b}{a+b}$$

Com isso:

$$\frac{sen^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\left(\frac{a}{a+b}\right)^4\frac{1}{a^3}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^4\frac{1}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

Gabarito: $\frac{1}{(a+b)^3}$

---

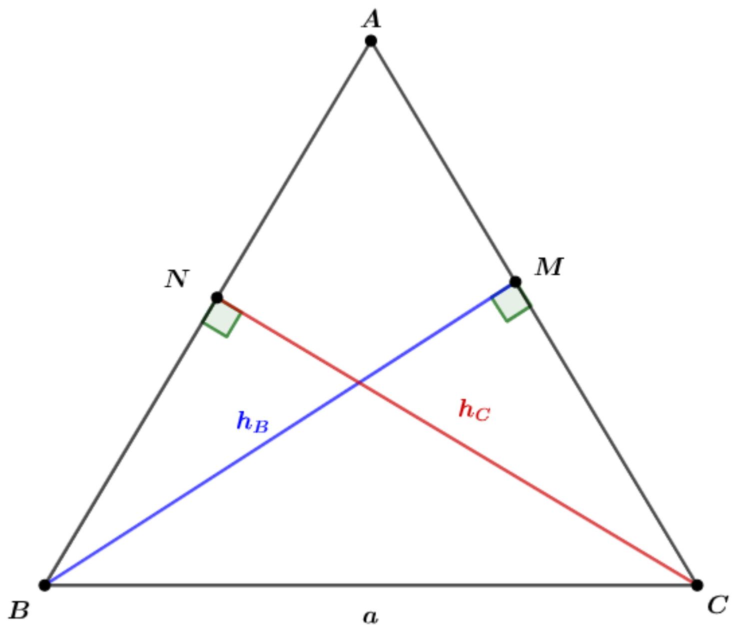
10. (IME/2022)

Seja um triângulo acutângulo ΔABC onde h_B e h_C são as alturas dos vértices B e C, respectivamente, e $\overline{BC}=a$. Sabendo-se que $\frac{h_Bh_C}{a^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\frac{p}{q\sqrt{m}}$, calcule $p+q+m$.

Dados:

- p, q e m são números naturais;
- p e q são primos entre si; e
- m é o menor possível.

Comentários



Pela figura, temos que:

$$sen\ B = \frac{h_C}{a}$$

$$sen\ C = \frac{h_B}{a}$$

$$\Rightarrow senB\ senC = \frac{h_B h_C}{a^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Analisando a expressão pedida e usando $A = 180° - (B + C)$:

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \cos\big(180° - (B + C)\big) + \cos B\cos C = -\cos(B + C) + \cos B\cos C$$

$$= -(\cos B\cos C - sen\ B\ sen\ C) + \cos B\cos C = -\cos B\cos C + senBsenC + \cos B\cos C$$

$$= senB\ senC$$

Portanto:

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = senB\ senC = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{p}{q\sqrt{m}}$$

Logo:

$$p = 3; q = 2; m = 6$$

$$\therefore p + q + m = 3 + 2 + 6 = 11$$

Gabarito: 11