Estratégia Militares

Correção

Prova IME 2022

Prof. Victor So

Prova Resolvida

1. (IME/2022)

Seja o sistema

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 6x_4 - 1 \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_4^2 = 6x_3 - 1 \\ 3x_1^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 6x_2 - 1 \\ 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 6x_1 - 1 \end{cases}$$

O valor de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ é:

a) 12

b) 4/3

c) 2/3

d) 1/3

e) 9

Comentários

Somando todas as equações:

$$9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 + 9x_4^2 = 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 4$$

$$(9x_1^2 - 6x_1 + 1) + (9x_2^2 - 6x_2 + 1) + (9x_3^2 - 6x_3 + 1) + (9x_4^2 - 6x_4 + 1) = 0$$

$$(3x_1 - 1)^2 + (3x_2 - 1)^2 + (3x_3 - 1)^2 + (3x_4 - 1)^2 = 0$$

Supondo que o conjunto universo do sistema é o conjunto dos reais, temos que:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

*Observação: poderíamos ter outra solução caso considerássemos o conjunto dos complexos.

Gabarito: A

---

2. (IME/2022)

Seja B o conjunto de todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a soma dos termos da progressão

$$-\frac{4}{3x}, \frac{16}{9x^2}, -\frac{64}{27x^3}, \frac{256}{81x^4}, \dots$$

assume um valor finito. Define-se a função $f: B \to \mathbb{R}$, para cada $x \in B$, tal que

$$f(x) = -\frac{4}{3x} + \frac{16}{9x^2} - \frac{64}{27x^3} + \frac{256}{81x^4} - \cdots$$

A soma das raízes da equação $f(x) = -x, x \in B$, é:

a) 0

b) -2

c) $-4/3$

d) $2/3$

e) $4/3$

Comentários

Analisando a sequência, temos que o conjunto B é uma progressão geométrica de razão:

$$q = \frac{\frac{16}{9x^2}}{-\frac{4}{3x}} = -\frac{4}{3x}$$

Como a soma converge, temos que ter $|q| < 1$. Além disso, da condição de existência, $x \neq 0$.

Para $f(x)$, como a soma converge, podemos usar a soma da PG infinita:

$$f(x) = -\frac{4}{3x} + \frac{16}{9x^2} - \frac{64}{27x^3} + \frac{256}{81x^4} - \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{4}{3x}}{1-\left(-\frac{4}{3x}\right)} = -\frac{4}{3x+4}$$

Encontrando as raízes:

$$f(x) = -\frac{4}{3x+4} = -x$$

Note que $x \neq -4/3$, logo podemos multiplicar a equação por $3x + 4$:

$$-4 = -3x^2 - 4x$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} = -2 \; ou \; \frac{2}{3}$$

Testando os valores para q:

$$x = -2 \Rightarrow q = -\frac{4}{3(2)} = -\frac{2}{3} \; OK$$

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow q = -4\left(3\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -2 < -1 (não \; convém)$$

Com isso, temos uma única raiz como solução, $x = 2$.

Gabarito: B

---

3. (IME/2022)

Considere o conjunto de todas as retas que são secantes ao gráfico da função

$$f(x) = \ln\left(\left|-\frac{7}{12} + x - x^2\right|^{3x-1}\right)$$

e que passam pelo ponto $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

O menor valor dentre os coeficientes angulares das retas desse conjunto é:

a) $-3\ln(3)$

b) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

c) $3\ln\left(\frac{13}{36}\right)$

d) 0

e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Para $x = 1/3$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\left|-\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right|^{3\left(\frac{1}{3}\right)-1}\right) = \ln\left(\left|-\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right|^{0}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo:

$$\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

A reta é da forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y = m\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Queremos o menor valor de m tal que a equação abaixo tenha 2 soluções distintas (condição de secante):

$$y = m\left(x - \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\left|-\frac{7}{12}+x-x^2\right|^{3x-1}\right)$$

Note que o logaritmando é sempre negativo, pois:

$$\Delta = 1 - 4\left(-\frac{7}{12}\right)(-1) = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0$$

Logo:

$$m\left(x - \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\left(x^2 - x + \frac{7}{12}\right)^{3x-1}\right) = (3x-1)\left(\ln\left(x^2 - x + \frac{7}{12}\right)\right)$$

$$m(3x-1) = 3(3x-1)\ln\left(x^2 - x + \frac{7}{12}\right)$$

Para $x \neq 1/3$:

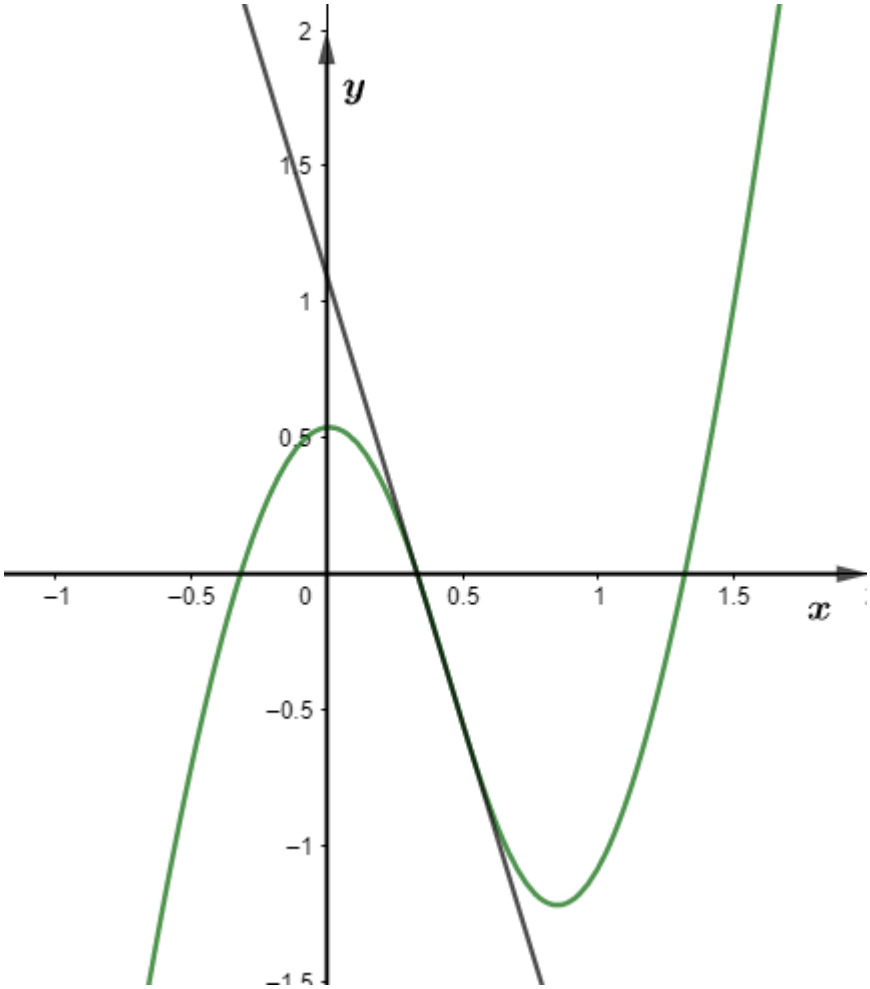
$$m = 3\ \ln\left(x^2 - x + \frac{7}{12}\right)$$

O menor valor ocorre quando o logaritmando é mínimo, logo:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m = 3\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -3\ln 3$$

*Observação: para esse valor de m, a reta é tangente e não secante conforme o gráfico:



Gabarito: A

---

4. (IME/2022)

Quantos pares ordenados (x, y) de números inteiros satisfazem a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{23}$?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

Da condição de existência: $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Analisando a equação:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{23} \Rightarrow 23x + 23y = xy \Rightarrow 23x - xy + 23y - 23^2 = -23^2$$

$$x(23-y) + 23(y-23) = -23^2$$

$$(23-x)(y-23) = -23^2$$

$$(x-23)(y-23) = 23^2$$

Analisando as possibilidades:

$x-23$	$y-23$
1	23^2
23	23
-1	-23^2
-23	-23
23^2	1
-23^2	-1

Dessas 6, temos que $x - 23 = -23$ implica $x = 0$, logo, apenas 5 soluções satisfazem à equação.

Gabarito: E

---

5. (IME/2022)

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e z_1, z_2, z_3 números complexos tais que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 4$ e $z_1 \neq z_2$. O menor valor de $|\alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2 - z_3|$, é:

a) $\frac{1}{8}|z_1 + z_2|$

b) $\frac{1}{4}|z_1 - z_2|$

c) $\frac{1}{8}|z_3 - z_1||z_3 - z_2|$

d) $\frac{1}{4}|z_1 - z_2 - z_3|$

e) $|z_3|$

Comentários

Como $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 4$, temos que esses complexos pertencem a uma mesma circunferência de raio 4. Analisando a expressão pedida:

$$|\alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2 - z_3|$$

Fazendo $z = \alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2$:

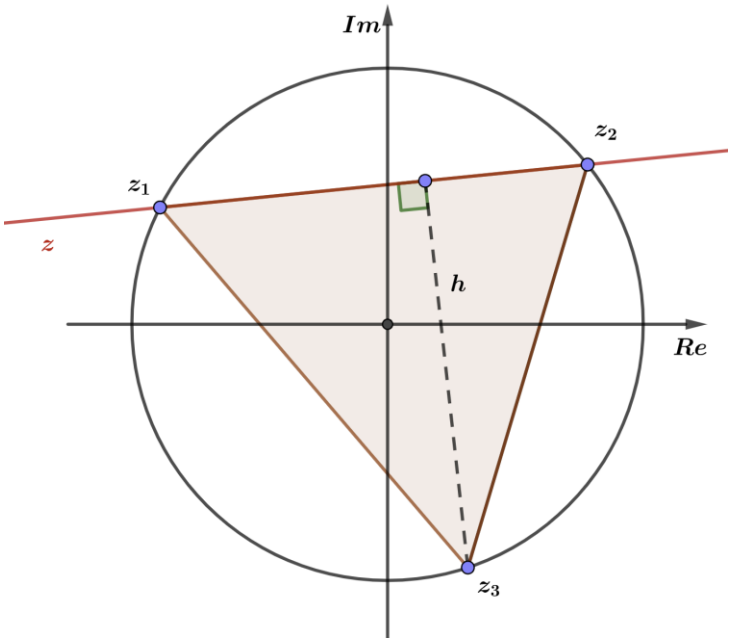
$$z = \alpha(z_1 - z_2) + z_2$$

$$z - z_2 = \alpha(z_1 - z_2)$$

Logo:

$$|\alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2 - z_3| = |z - z_3|$$

Assim, temos que z é uma reta que passa pelos pontos z_1 e z_2. Representando o plano complexo:



Calculando a área do triângulo formado pelos afixos z_1, z_2 e z_3:

$$\frac{abc}{4R} = \frac{|z_1 - z_2||z_1 - z_3||z_2 - z_3|}{4 \cdot 4} = \frac{|z_1 - z_2|h}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|z_1 - z_3||z_2 - z_3|}{8} = \frac{|z_3 - z_1||z_3 - z_2|}{8}$$

Gabarito: C

---

6. (IME/2022)

Seja o número complexo $z = \left(1 - 2\sqrt{2}i\right)^{12}$. Sabe-se que $m = |z|$. O valor de x na expressão $2x = \log_m(27m)$ é:

a) $15/14$

b) $5/14$

c) $5/8$

d) $15/4$

e) $3/8$

Comentários

Calculando m:

$$m = \left|\left(1 - 2\sqrt{2}i\right)^{12}\right| = \left|1 - 2\sqrt{2}i\right|^{12} = \sqrt{9}^{12} = 3^{12}$$

Analisando a expressão:

$$2x = \log_{3^{12}}\left(27(3^{12})\right) = \log_{3^{12}}\left((3^3)(3^{12})\right) = \log_{3^{12}}(3^{15}) = \frac{15}{12}$$

$$2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

Gabarito: C

---

7. (IME/2022)

Seja a equação do terceiro grau em x:

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

onde $p_1 < p_2 < p_3$ são números primos menores que 100. Para que a razão entre a soma e o produto das raízes da equação seja a maior possível, o valor de $p_2 + p_3$ deve ser:

a) 144

b) 152

c) 162

d) 172

e) 196

Comentários

Pelas relações de Girard, temos:

$$k = \frac{S}{P} = \frac{-p_1}{-p_3} = \frac{p_1}{p_3}$$

Para maximizar a razão, temos que maximizar p_1 e minimizar p_3. Como $p_1 < p_2 < p_3$, temos que ter p_1, p_2, p_3 como primos consecutivos. Analisando as alternativas, percebemos que os primos estão mais próximos de 100, logo:

$$primos \in \{97, 89, 83, 79, 73, 71, 67, 61, 59, \dots\}$$

Testando as possibilidades:

p_3	p_2	p_1	p_1/p_3
97	89	83	0,855
89	83	79	0,887
83	79	73	0,879
79	73	71	0,899
73	71	67	0,918

Assim, temos que a maior razão é a tripla $(p_3, p_2, p_1) = (73, 71, 67)$. Logo:

$$p_2 + p_3 = 71 + 73 = 144$$

Gabarito: A

8. (IME/2022)

Os valores para s e t são escolhidos no intervalo $(0, r)$, tais que $s + t < r$. Considere três segmentos de reta com comprimentos s, t e $r - s - t$. Qual a probabilidade desses segmentos formarem um triângulo?

a) 2/3

b) 1/2

c) 1/3

d) 1/4

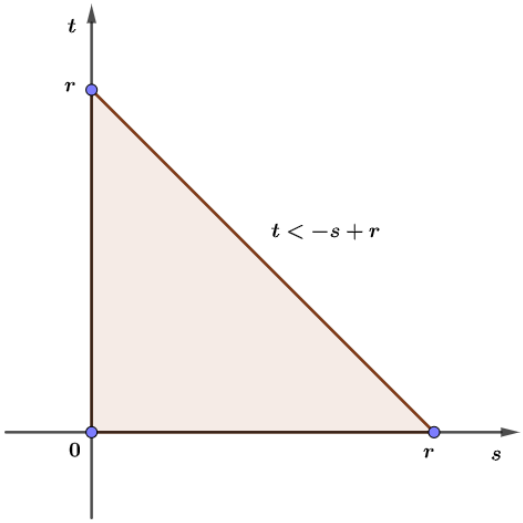
e) 3/4

Comentários

Para calcularmos a probabilidade, iremos analisar o espaço amostral da situação. Inicialmente, temos que

$$\begin{cases} 0 < s < r \\ 0 < t < r \\ s + t < r \end{cases}$$

Tomando-se s como o eixo x e t como o eixo y, temos que a terceira inequação representa a região abaixo da reta $t < -s + r$.



Agora, analisando a condição de existência de um triângulo de lados s, t e $r - s - t$, temos:

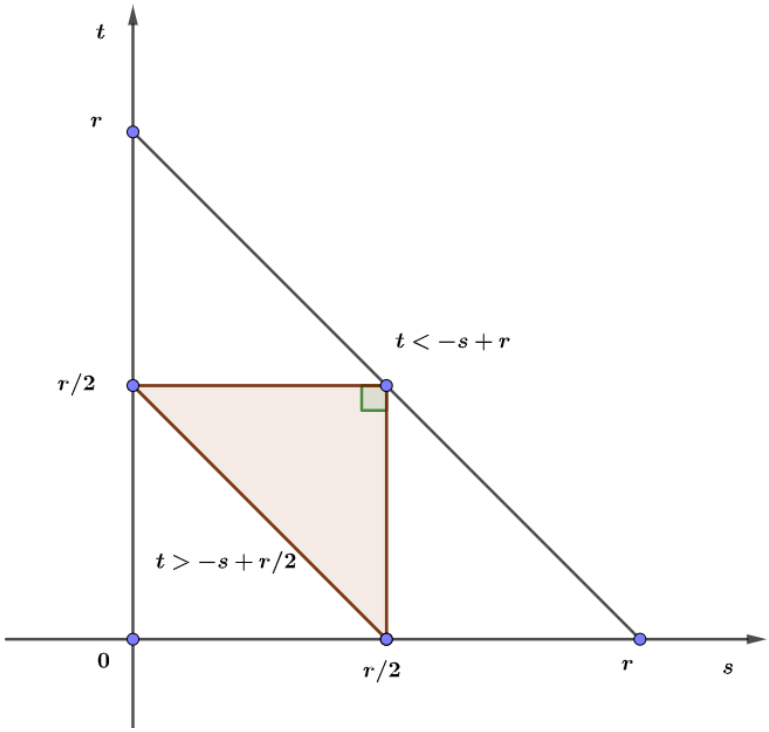
$$s < r - s - t + t \Rightarrow 2s < r \Rightarrow s < \frac{r}{2}$$

Analogamente:

$$t < \frac{r}{2}$$

$$r - s - t < s + t \Rightarrow r < 2(s + t) \Rightarrow s + t > \frac{r}{2} \Rightarrow t > -s + \frac{r}{2}$$

Inserindo essas inequações no gráfico:



A probabilidade é dada pela razão dos casos favoráveis sobre os casos possíveis. Pensando em áreas das figuras planas:

$$P = \frac{\frac{1}{2}\frac{r}{2}\frac{r}{2}}{\frac{1}{2}\,r\,r} = \frac{1}{4}$$

Gabarito: D

---

9. (IME/2022)

Considere o quadrado de lado L apresentado na Figura A. Ao aplicar uma determinada operação de corte, obtém-se a Figura B e repetindo a operação, em cada quadrado remanescente, obtém-se a Figura C. Qual será a área remanescente, a partir do quadrado da Figura A, ao final de 10 operações?

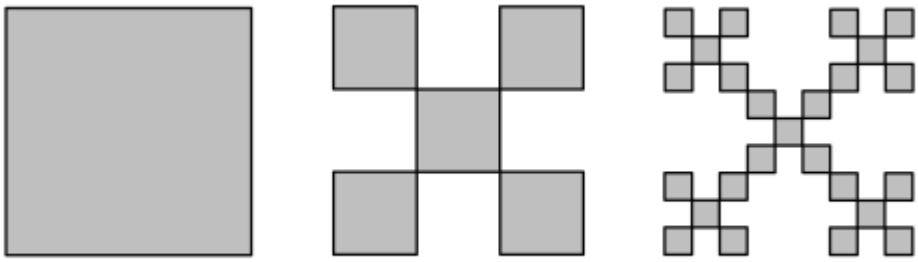


Figura A Figura B Figura C

a) $\frac{5^9 L^2}{9^9}$

b) $\frac{5^{10} L^2}{9^{10}}$

c) $\frac{5^{11} L^2}{9^{11}}$

d) $\left(\frac{9^{10}-5^{10}}{9^{10}}\right)L^2$

e) $\left(\frac{5^{10}-9^{10}}{9^{10}}\right)L^2$

Comentários

A sequência de operações gera uma progressão geométrica com a área das figuras planas formadas. O primeiro termo é igual à área da figura B.

Da figura A, temos que sua área é L^2. Na figura B, note que o quadrado foi subdividido em 9 quadrados e 4 deles foram retirados. Logo, o primeiro elemento da PG é:

$$a_1 = L^2\left(\frac{5}{9}\right)$$

Na figura C, perceba que cada um dos quadrados menores da figura B foi subdividida novamente, o que nos dá como área:

$$a_2 = L^2\left(\frac{5}{9}\right)^2$$

Logo, a razão da PG é $5/9$. A área após 10 operações é o termo a_{10}:

$$a_{10} = a_1 q^9 = L^2\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^9 = \frac{5^{10}L^2}{9^{10}}$$

Gabarito: B

---

10. (IME/2022)

Considere as propriedades dos coeficientes binomiais. Qual das seguintes identidades está incorreta?

a) $\binom{100}{0}^2 + \binom{100}{1}^2 + \cdots + \binom{100}{100}^2 = \binom{200}{100}^2$

b) $\binom{100}{39} + \binom{100}{40} = \binom{101}{40}$

c) $2 \times 1 \times \binom{100}{2} + 3 \times 2 \times \binom{100}{3} + 4 \times 3 \times \binom{100}{4} + \cdots + 100 \times 99 \times \binom{100}{100} = 9900 \times 2^{98}$

d) $\binom{100}{1} + 2 \times \binom{100}{2} + 3 \times \binom{100}{3} + \cdots + 100 \times \binom{100}{100} = 100 \times 2^{99}$

e) $1 - \binom{100}{1} + \binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \cdots + \binom{100}{100} = 0$

Comentários

Testando as alternativas:

a) Falsa.

Note que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n \left(\frac{1}{x} + x\right)^n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$$

Usando o binômio de Newton:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}\sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k'}x^{k'}=\sum_{k''=0}^{2n}\binom{2n}{k''}x^{2n-k''}\left(\frac{1}{x}\right)^{k''}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}\sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'}x^{2k'-n}=\sum_{k''=0}^{2n}\binom{2n}{k''}x^{2n-2k''}$$

Comparando os coeficientes dos termos independentes da esquerda e da direita da equação, obtemos:

$$\sum_{k''=0}^{2n}\binom{2n}{k''}x^{2n-2k''}\Rightarrow 2n-2k''=0\Rightarrow k''=n\Rightarrow [x^0]=\binom{2n}{n}$$

Note que o coeficiente do termo independente do lado esquerdo será dado por $k=k'$, logo:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}\sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'}x^{2k'-n}\Rightarrow [x^0]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Para $n=100$, temos:

$$\binom{100}{0}^2+\binom{100}{1}^2+\cdots+\binom{100}{100}^2=\binom{200}{100}$$

b) Verdadeira.

Usando a relação de Stifel:

$$\binom{100}{39}+\binom{100}{40}=\binom{101}{40}$$

c) Verdadeira.

Pelo teorema das linhas:

$$2^{98}=\binom{98}{0}+\binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\cdots+\binom{98}{98}$$

Multiplicando por $100\cdot 99$:

$$100\cdot 99\cdot 2^{98}=100\cdot 99\cdot\binom{98}{0}+100\cdot 99\cdot\binom{98}{1}+100\cdot 99\cdot\binom{98}{2}+\cdots+100\cdot 99\cdot\binom{98}{98}$$

$$9900\cdot 2^{98}=100\cdot 99\cdot\frac{98!}{0!\,98!}+100\cdot 99\cdot\frac{98!}{1!\,97!}+100\cdot 99\cdot\frac{98!}{2!\,96!}+\cdots+100\cdot 99\cdot\frac{98!}{98!\,0!}$$

$$9900\cdot 2^{98}=2\cdot 1\cdot\frac{100!}{2!\,98!}+3\cdot 2\cdot\frac{100!}{3!\,97!}+4\cdot 3\cdot\frac{100!}{4!\,96!}+\cdots+100\cdot 99\cdot\frac{100!}{100!\,0!}$$

$$9900\cdot 2^{98}=2\cdot 1\cdot\binom{100}{2}+3\cdot 2\cdot\binom{100}{3}+4\cdot 3\cdot\binom{100}{4}+\cdots+100\cdot 99\cdot\binom{100}{100}$$

d) Verdadeira.

$$2^{99} = \binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \binom{99}{2} + \cdots + \binom{99}{99}$$

Multiplicando por 100:

$$100 \cdot 2^{99} = 100 \cdot \binom{99}{0} + 100 \cdot \binom{99}{1} + 100 \cdot \binom{99}{2} + \cdots + 100 \cdot \binom{99}{99}$$

$$100 \cdot 2^{99} = 100 \cdot \frac{99!}{0!\,99!} + 100 \cdot \frac{99!}{1!\,98!} + 100 \cdot \frac{99!}{2!\,97!} + \cdots + 100 \cdot \frac{99!}{99!\,0!}$$

$$100 \cdot 2^{99} = 1 \cdot \frac{100!}{1!\,99!} + 2 \cdot \frac{100!}{2!\,98!} + 3 \cdot \frac{100!}{3!\,97!} + \cdots + 100 \cdot \frac{100!}{100!\,0!}$$

$$100 \cdot 2^{99} = 1 \cdot \binom{100}{2} + 2 \cdot \binom{100}{2} + 3 \cdot \binom{100}{3} + \cdots + 100 \cdot \binom{100}{100}$$

e) Verdadeira.

Note que

$$(1-1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^{100-k}(-1)^k = \binom{100}{0} - \binom{100}{1} + \binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \cdots + \binom{100}{100} = 0$$

Gabarito: A

---

11. (IME/2022)

Seja a matriz quadrada A de ordem 2021 cujo o elemento da linha i e coluna j é

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = 1\ ou\ i \neq j \\ 0, & se\ i = j \neq 1 \end{cases}$$

com $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$. O valor do determinante de A é:

a) -2021

b) 2021

c) 0

d) 1

e) -1

Comentários

Temos o seguinte determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(2021)x(2021)}$$

Usando a regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{(2020)x(2020)}$$

Logo:

$$\det A = (-1)^{2020} = 1$$

Gabarito: D

---

12. (IME/2022)

Para cada número n natural, seja a função real $f_n(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq \frac{(k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$, de forma que:

$$f_n(x) = \frac{[tg(x)]^n + 1}{n[\sec(x)]^n}$$

A função $g(x)$ que atende $g(x) = f_6(x) - f_4(x) + 1/3$ é:

a) $\cos(x) + 3$

b) $1/4$

c) $sen(x) - 2$

d) $1/12$

e) $tg(x) - 1/3$

Comentários

$$g(x) = \frac{[tg(x)]^6 + 1}{6[\sec(x)]^6} - \left(\frac{[tg(x)]^4 + 1}{4[\sec(x)]^4}\right) + \frac{1}{3}$$

$$g(x) = \frac{\frac{sen^6(x)}{\cos^6 x} + 1}{6\left(\frac{1}{\cos^6 x}\right)} - \left(\frac{\frac{sen^4(x)}{\cos^4 x} + 1}{4\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right)}\right) + \frac{1}{3}$$

$$g(x) = \frac{sen^6 x + \cos^6 x}{6} - \left(\frac{sen^4 x + \cos^4 x}{4}\right) + \frac{1}{3}$$

Usando a relação fundamental:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow (sen^2 x + \cos^2 x)^2 = sen^4 x + \cos^4 x + 2sen^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow sen^4 x + \cos^4 x = 1 - 2sen^2 x \cos^2 x$$

$$sen^6 x + \cos^6 x = (sen^2 x + \cos^2 x)(sen^4 x - sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$\Rightarrow sen^6 + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x \cos^2 x$$

Substituindo:

$$g(x) = \frac{1 - 3sen^2 x \cos^2 x}{6} - \left(\frac{1 - 2sen^2 x \cos^2 x}{4}\right) + \frac{1}{3}$$

$$g(x) = \frac{2 - 6sen^2x\cos^2 x - 3 + 6sen^2x\cos^2 x + 4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Gabarito: B

---

13. (IME/2022)

Considere o ponto $A(-4,2)$ e B um ponto variável sobre o eixo das ordenadas. Traçam-se as retas AB e por B, a perpendicular a AB que intercepta o eixo das abcissas em C. Seja a equação do lugar geométrico do ponto de interseção da perpendicular ao eixo das abcissas traçada por C com a perpendicular ao eixo das ordenadas traçada por B. A equação desse lugar geométrico é:

a) $x^2 = 4y + 1$

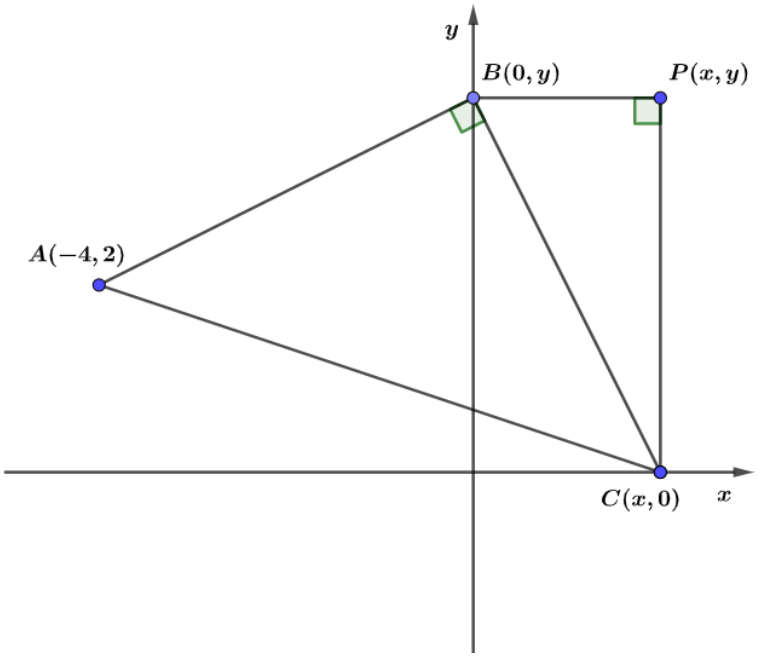
b) $y^2 = 4x$

c) $y = -x + 2$

d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

e) $(y-1)^2 = 4x + 1$

Comentários



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Usando a fórmula de distância de ponto a ponto, obtemos:

$$\sqrt{(x+4)^2 + 2^2}^2 = \sqrt{4^2 + (y-2)^2}^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2}$$

$$x^2 + 8x + 16 + 4 = 16 + y^2 - 4y + 4 + x^2 + y^2$$

$$8x = 2y^2 - 4y$$

$$4x = y^2 - 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 4x + 1$$

$$(y-1)^2 = 4x+1$$

Gabarito: E

---

14. (IME/2022)

Considere os triângulos ΔABC em que $\overline{BC} = 32$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 3$. O maior valor possível para a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é:

a) 8

b) 9

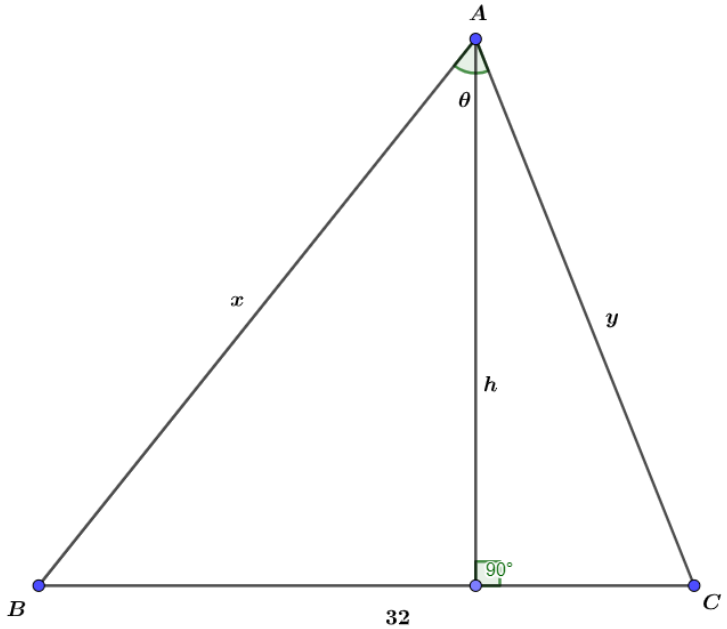
c) 10

d) 11

e) 12

Comentários

Solução 1)



Do enunciado:

$$\frac{AB}{AC} = 3 \Rightarrow x = 3y$$

Calculando a área de ABC:

$$[ABC] = \frac{32h}{2} = \frac{xy\ sen(\theta)}{2} \Rightarrow h = \frac{xy\ sen(\theta)}{32}$$

$$\therefore h = \frac{3sen(\theta)}{32}y^2 \quad (I)$$

Usando a lei dos cossenos:

$$32^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$

Substituindo $x = 3y$:

$$32^2 = 9y^2 + y^2 - 6y^2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{32^2}{10 - 6\cos\theta}$$

Substituindo em (I):

$$h = \frac{3sen(\theta)}{32}\left(\frac{32^2}{10 - 6\cos\theta}\right) = \frac{96sen(\theta)}{10 - 6\cos\theta}$$

Para encontrar a maior altura, podemos derivar a função de h em relação à θ e igualar a zero:

$$h' = \frac{\left(96sen(\theta)\right)'(10 - 6\cos\theta) - 96sen(\theta)(10 - 6\cos\theta)'}{(10 - 6\cos\theta)^2}$$

$$h' = \frac{96\cos\theta\,(10 - 6\cos\theta) - 96sen(\theta)(6\,sen\,\theta)}{(10 - 6\cos\theta)^2}$$

$$h' = \frac{960\cos\theta - 96 \cdot 6(\cos^2\theta + sen^2\theta)}{(10 - 6\cos\theta)^2}$$

$$h' = \frac{960\cos\theta - 96 \cdot 6}{(10 - 6\cos\theta)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 960\cos\theta = 96 \cdot 6 \Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

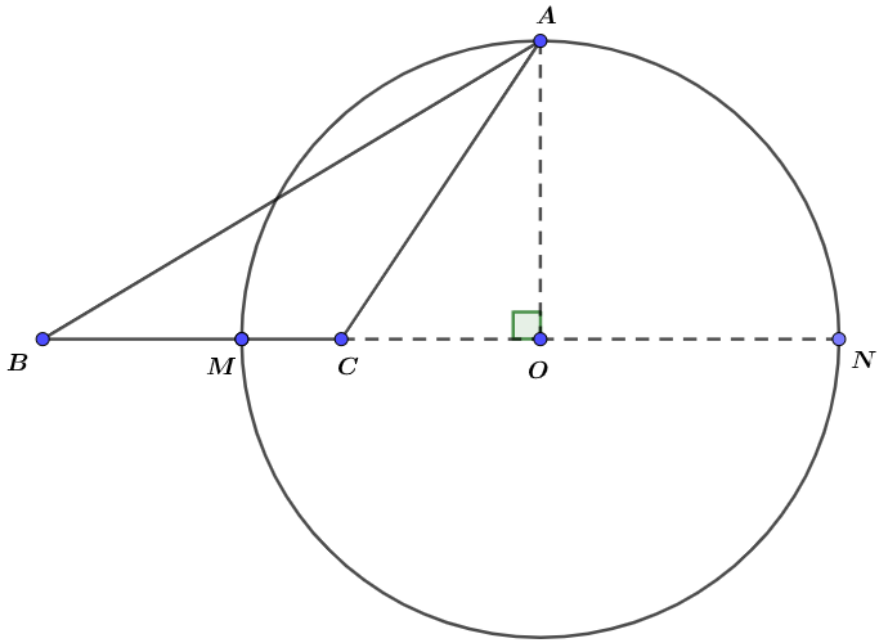
Como $\theta \in (0, \pi)$, temos que $sen\,\theta > 0$. Pela relação fundamental, encontramos:

$$sen\,\theta = \frac{4}{5}$$

Substituindo na expressão de h:

$$h = \frac{96sen(\theta)}{10 - 6\cos\theta} = \frac{\left(96 \cdot \frac{4}{5}\right)}{10 - 6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{96 \cdot 4}{50 - 18} = \frac{96 \cdot 4}{32} = 3 \cdot 4 = 12$$

Solução 2) Circunferência de Apolônio



A maior altura possível em relação à base BC é o raio da circunferência de Apolônio. Como $\frac{AB}{AC} = 3$, temos que:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = 3$$

Logo:

$$\frac{MB}{MC} = 3 \Rightarrow \frac{(32 - MC)}{MC} = 3 \Rightarrow 32 - MC = 3MC \Rightarrow MC = \frac{32}{4} = 8 \therefore MB = 24$$

Seja R o raio da circunferência, logo:

$$\frac{NB}{NC} = 3 \Rightarrow \frac{2R + 24}{2R - 8} = 3 \Rightarrow 2R + 24 = 6R - 24 \Rightarrow 4R = 48 \therefore R = 12 = h$$

Gabarito: E

---

15. (IME/2022)

Seja o cone de revolução de raio de base R e altura $3R/2$ com a base apoiada em um solo horizontal. Um ponto luminoso está localizado a uma altura $3R$ do solo e distante, horizontalmente, $2R$ do centro da base do cone. A área S da região iluminada no cone é:

a) $\pi R^2\sqrt{13}$

b) $2\pi R^2\sqrt{13}/3$

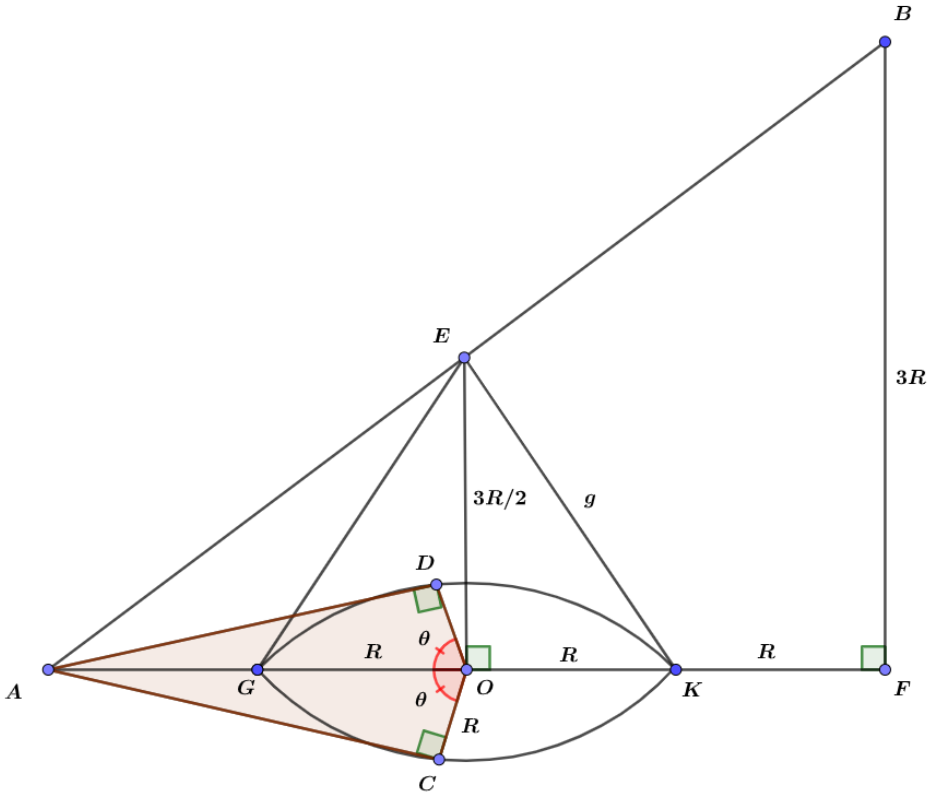
c) $\pi R^2\sqrt{13}/2$

d) $\pi R^2\sqrt{13}/3$

e) $\frac{13}{4}\pi R^2$

Comentários

Desenhando o cone e o ponto luminoso, obtemos:



B é o ponto luminoso e a região de sombra que a luz faz com o cone é o ΔACD. $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são tangentes ao cone e a projeção dos planos BCE e BDE no solo são as tangentes $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.

Note que $\Delta AOE \sim \Delta AFB$, logo:

$$\frac{EO}{BF} = \frac{AO}{AF} \Rightarrow AO = \frac{AF}{2}$$

Assim, temos que O é ponto médio de AF, com $AO = OF = 2R$, ou seja, $AG = R$.

Analisando o triângulo AOC:

$$\cos\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \therefore \theta = 60°$$

Assim, temos que a região de sombra na base corresponde a um setor circular de $120°$.

Calculando a geratriz do cone:

$$g^2 = R^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2 = \frac{13R^2}{4} \therefore g = \frac{\sqrt{13}R}{2}$$

A área iluminada será dada por:

$$\frac{S_{iluminada}}{360° - 120°} = \frac{S_{lateral}}{360°} \Rightarrow S_{ilumanda} = (\pi R g)\frac{240°}{360°} = \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{13}}{2}R^2 = \frac{\pi R^2\sqrt{13}}{3}$$

Gabarito: D